Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Sulla stabilità dell'equilibrio di un arco in profilato sottile: casi particolari. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.1-2, p. 54–58.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_1-2_54_0¿

Meccanica. — *Sulla stabilità dell'equilibrio di un arco in profilato sottile: casi particolari.* Nota II di Giorgio Ferrarese, presentata (*) dal Socio G. Krall.

Riprendo le equazioni dell'equilibrio di un arco circolare in profilato sottile, stabilite nella precedente Nota I, per procedere a qualche esemplificazione e controllo. Precisamente, scritta l'equazione del λ_{cr} nel caso generale, passo a considerare i due casi rispettivamente dello sforzo assiale e del momento flettente; e per finire quello dello sforzo assiale eccentrico.

Naturalmente si ritrovano al limite, e cioè nel caso ordinario, le equazioni ben note del Timoshenko e, per $R \to \infty$, cioè nel caso rettilineo, le formole dei profili sottili.

I paragrafi e le formole che seguono sono numerati in continuazione di quelli della Nota I.

4. L'equazione per il λ_{cr}. – Limitandomi per semplicità a considerare il caso non estenzionale, $e_\psi = 0$, con che [cfr. $(7)_2$] $q_0 R = N$, il sistema (7), ponendo per brevità

$$\zeta = w'' + \frac{w}{R^2}, \tag{10}$$

assume la forma [cfr. l'Osservazione del n. 3]

$$\left\{\begin{aligned}
&B_2 \zeta'' + \left(\frac{B_2}{R^2} + \lambda N\right)\zeta - B_2 \tilde{x}_0 \left(\varphi'' + \frac{\varphi}{R^2}\right)'' - \left(\frac{B_2 \tilde{x}_0}{R^2} + \lambda N x_0\right)\left(\varphi'' + \frac{\varphi}{R^2}\right) = 0\\
&\left[\lambda M - \frac{B_1 + C}{R} - \tilde{z}_0 \frac{C}{R^2} + \lambda N z_0\right]\varphi'' + B_1 (u^{IV} + \tilde{z}_0 \varphi^{IV}) +\\
&\qquad\qquad - \left(\frac{C}{R^2} - \lambda \frac{M}{R} - \lambda N\right) u'' = 0\\
&\left(\frac{B_1}{R^2} - \lambda \frac{M}{R} + \frac{\lambda N x_0}{R^2}(x_0 - \tilde{x}_0)\right)\varphi - \left[C + \tilde{z}_0 \frac{B_1 + C}{R} + \lambda (\beta M - \rho N)\right]\varphi'' +\\
&\qquad + C_1 \varphi^{IV} - \left[\frac{B_1 + C}{R} - \lambda M \left(1 - \frac{\tilde{z}_0}{R}\right) - \lambda N (z_0 - \tilde{z}_0)\right] u'' +\\
&\qquad\qquad - \lambda N (x_0 - \tilde{x}_0)\,\zeta = 0 .
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Si noti che le equazioni (11) costituiscono un sistema effettivo, sì che u, w e φ sono intimamente legati. Tuttavia è agevole la riduzione ad un sistema in u e φ, riduzione che direttamente si presenta nei due casi, in appresso considerati, $N = 0$, $x_0 = \tilde{x}_0$.

Con le posizioni soddisfacenti alle condizioni agli estremi, fissi ma a snodo, e quindi $u = w = 0$; $u'' = w'' = 0$; $\varphi = 0$; $\varphi'' = 0$; A_1, A_2, A_3 essendo costanti a priori indeterminate,

$$u = A_1 \sin \frac{Ks}{R} \quad , \quad w = A_2 \sin \frac{Ks}{R} \quad , \quad \varphi = A_3 \sin \frac{Ks}{R} \quad , \quad \left(K = \frac{\pi}{2\psi_0}\right)$$

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1962.

si ha l'equazione di compatibilità in λ che sostituisce la (1)

$$
(12)\quad \begin{vmatrix}
0 & \dfrac{B_2}{R^2}(K^2-1)-\lambda N & \dfrac{B_2\tilde{x}_0}{R^2}(1-K^2)+\lambda N x_0 \\[2ex]
\dfrac{B_1K^2+C}{R^2}-\lambda\left(N+\dfrac{M}{R}\right) & 0 & \begin{array}{l}\dfrac{B_1+C}{R}+\tilde{z}_0\dfrac{B_1K^2+C}{R^2}+\\ -\lambda M-\lambda N z_0\end{array} \\[4ex]
\begin{array}{l}K^2\left[\dfrac{B_1+C}{R}-\lambda M\left(1-\dfrac{\tilde{z}_0}{R}\right)+\right.\\ \left.\qquad -\lambda N(z_0-\tilde{z}_0)\right]\end{array} & \lambda N(K^2-1)(x_0-\tilde{x}_0) & \begin{array}{l}\dfrac{K^4}{R^2}C_1+K^2\left[C+\tilde{z}_0\dfrac{B_1+C}{R}+\right.\\ \left.+\lambda(\beta M-\rho N)\right]+B_1-\lambda RM\\ +\lambda N x_0(x_0-\tilde{x}_0)\end{array}
\end{vmatrix}=0\,.
$$

La più piccola delle tre radici della equazione ora scritta dà naturalmente il λ_{cr} cercato. Si noti anche qui, per $C_1=0$, $\beta=0$, $\rho=0$, $x_0=\tilde{x}_0=0$, $z_0=\tilde{z}_0=0$, la perfetta coincidenza della (12) con la citata (1) della teoria dei profilati ordinari.

5. IL CASO $N=0$. – In assenza di sforzo assiale l'equazione (12) si riduce a (risultando inessenziale il parametro λ di cui gli uffici passano ad M)

$$
\left(1-K^2-\frac{\beta_1}{R}K^2\right)M^2-\frac{1}{R}\left[(1-K^2)\left(B_1+C+2\frac{\tilde{z}_0}{R}K^2B_1\right)+\right.
$$
$$
\left.-K^2\frac{B_1K^2+C}{R}\left(\beta_1-\frac{\tilde{z}_0^2}{R}\right)+\frac{K^4}{R^2}C_1\right]M+\frac{B_1C}{R^2}(1-K^2)^2+C_1\frac{K^4}{R^4}(B_1K^2+C)=0
$$

ovvero anche

$$
(13)\qquad y_1(M)-y_2(M)=0
$$

se si pone, per brevità di scrittura,

$$
(14)\quad \left\{\begin{array}{l}
y_1(M)=(K^2-1)\left[M^2-\dfrac{B_1+C}{R}M+\dfrac{B_1C}{R^2}(1-K^2)\right]\\[2ex]
y_2(M)=-\dfrac{\beta_1}{R}K^2M^2-\left[2\dfrac{\tilde{z}_0}{R^2}K^2B_1(1-K^2)-\dfrac{K^2}{R^2}(B_1K^2+C)\cdot\right.\\[2ex]
\qquad\qquad \left.\cdot\left(\beta_1-\dfrac{\tilde{z}_0^2}{R}\right)+\dfrac{K^4}{R^3}C_1\right]M+C_1\dfrac{K^4}{R^4}(B_1K^2+C).
\end{array}\right.
$$

Si noti che la (13), per $\beta_1=0$, $C_1=0$, $\tilde{z}_0=0$ si riduce a $y_1(M)=0$ e fa quindi ritrovare il valore critico della teoria ordinaria (7):

$$
M_{cr}=\frac{1}{2R}\left[B_1+C+\sqrt{(B_1+C)^2+4B_1C(K^2-1)}\right]=
$$
$$
=\frac{1}{2R}\left[B_1+C+\sqrt{(B_1-C)^2+4B_1CK^2}\right].
$$

Naturalmente si è supposto $2\psi_0\neq\pi$, ma nel seguito questa limitazione si intende precisata in $2\psi_0<\pi$, ovvero $K^2>1$.

(7) Cfr. S. TIMOSHENKO, *Theory of elastic stability*, New-York, London 1961, p. 316.

Prendo in speciale considerazione il caso in cui è $z_0 = 0$ o, più in generale, $(z_0/R) \ll 1$. La $(14)_2$ si riduce allora alla forma

$$y_2(M) = \frac{\beta_1 K^2}{R}\left(M + \frac{C_1}{\beta_1}\frac{K^2}{R^2}\right)\left(\frac{B_1 K^2 + C}{R} - M\right).$$

Assumendo come termine di confronto l'M_{cr} della teoria ordinaria, nei casi in esame il valor critico, M'_{cr}, si abbassa o s'innalza a seconda dei valori di β_1 e C_1. Precisamente, essendo[8] $M_{cr} - \frac{B_1 K^2 + C}{R} < 0$ risulta $y_2(M_{cr}) > 0$ per $\beta_1 > 0$ e invece, per $\beta_1 < 0$, $y_2(M_{cr}) \gtrless 0$ a seconda che sia $M_{cr} + \frac{K^2}{R^2}\frac{C_1}{\beta_1} \lessgtr 0$. Ciò val quanto dire che *per i suddetti profili il valore del momento critico si innalza per* $\beta_1 > 0$, *qualunque sia* C_1 *e, per* $\beta_1 < 0$, *solo se risulta* $M_{cr} + \frac{K^2}{R^2}\frac{C_1}{\beta_1} < 0$.

6. IL CASO $M = 0, x_0 = \bar{x}_0$. - Si ha allora dalla (12) $NR^2 = B_2(K^2 - 1)$ e insieme [cfr. $(9)_2$ e (4)]

$$i_p^2 K^2 N^2 - \left[B_1 + K^2 C + \frac{K^4}{R^2} C_1 + i_p^2 \frac{K^2}{R^2}(B_1 K^2 + C) + z_c^2 \frac{K^2}{R^2}(B_1 K^2 + C) + \right.$$
$$\left. - 2 z_c \frac{K^2}{R}(B_1 + C)\right] N + \frac{B_1 C}{R^2}(1 - K^2)^2 + \frac{K^4}{R^4} C_1 (B_1 K^2 + C) = 0$$

ovvero

$$y_2(N) - y_1(N) = 0 \tag{16}$$

se si pone, in analogia col caso precedente,

$$\left\{\begin{aligned} y_1(N) &= (B_1 + K^2 C) N - \frac{B_1 C}{R^2}(1 - K^2)^2 \\ y_2(N) &= i_p^2 K^2\left(N - \frac{C_1}{i_p^2}\frac{K^2}{R^2}\right)\left(N - \frac{B_1 K^2 + C}{R^2}\right) + \\ &\quad + K^2 \frac{z_c}{R}\left[\frac{z_c}{R}(B_1 K^2 + C) - 2(B_1 + C)\right]. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Per $i_p = 0$, $C_1 = 0$, $z_c = 0$, si ritrova naturalmente il valore critico della teoria ordinaria[9]

$$N_{cr} = \frac{B_1 C}{R^2}\frac{(1 - K^2)^2}{B_1 + K^2 C}, \tag{18}$$

(8) Infatti dalla (15) segue

$$2 RM_{cr} - 2(B_1 K^2 + C) = B_1 - C - 2 B_1 K^2 + \sqrt{(B_1 - C)^2 + 4 B_1 CK^2} = -x + \sqrt{x^2 - \varepsilon} < 0$$

essendo

$$x = C - B_1 + 2 B_1 K^2 = C + B_1 + 2 B_1 (K^2 - 1) > 0 \quad , \quad \varepsilon = 4 B_1^2 K^2 (K^2 - 1) > 0.$$

(9) Cfr. S. TIMOSHENKO, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1923, p. 360.

e si vede bene anche qui che risulta [10]

$$N_{cr} - \frac{B_1 K^2 + C}{R^2} < 0 .$$

Corrispondentemente si ha dalla $(17)_2$, almeno per $\frac{z_c}{R} \ll 1$, $y_2(N_{cr}) < 0$ ovvero $y_2(N_{cr}) > 0$ a seconda che risulta:

$$\frac{C_1}{i_p^2} < \frac{R^2}{K^2} N_{cr} \quad \text{o} \quad \frac{C_1}{i_p^2} > \frac{R^2}{K^2} N_{cr} .$$

Assumendo pertanto come elemento di confronto l'N_{cr} della teoria ordinaria, *per i profili suddetti si ha un innalzamento del valore critico di* N *solo se risulta* $\frac{C_1}{i_p^2} > \frac{R^2}{K^2} N_{cr}$.

7. IL CASO DELLO SFORZO ASSIALE ECCENTRICO. – Il momento M agli estremi dia luogo ad eccentricità $e_z = e$ dello sforzo assiale costante N conseguente a q_0, sicché debba intendersi

$$M = -Ne .$$

La (12) si scrive allora, essendo anche qui inutile l'introduzione del parametro λ di cui gli uffici passano ad N,

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \frac{B_2}{R^2}(K^2 - 1) - N & \begin{array}{l} \underline{\frac{B_2 \tilde{x}_0}{R^2}(1 - K^2)} + N x_0 \end{array} \\ \frac{B_1 K^2 + C}{R^2} - N\left(1 - \frac{e}{R}\right) & 0 & \begin{array}{l} \frac{B_1 + C}{R} + \underline{\tilde{z}_0 \frac{B_1 K^2 + C}{R^2}} + \\ - N(z_0 - e) \end{array} \\ \begin{array}{l} K^2 \Big[\frac{B_1 + C}{R} + Ne\left(1 - \underline{\frac{\tilde{z}_0}{R}}\right) + \\ \qquad - N(z_0 - \underline{\tilde{z}_0}) \Big] \end{array} & N(K^2 - 1)(x_0 - \underline{\tilde{x}_0}) & \begin{array}{l} \frac{K^4}{R^2} C_1 + K^2 \Big[C + \underline{\tilde{z}_0 \frac{B_1 + C}{R}} + \\ - N(\beta e + \rho) \Big] + B_1 + \\ + N\left[Re + x_0 (x_0 - \underline{\tilde{x}_0}) \right] \end{array} \end{vmatrix} = 0 .$$

Questa equazione algebrica di 3° grado in N mette bene in evidenza che, anche nel caso dei profili sottili, esistono tre carichi di Eulero–Prandtl per assegnata eccentricità. Per $e = 0$ si ricade naturalmente nel caso già trattato $M = 0$; per $\beta = 0$, $\rho = 0$, $C_1 = 0$, $\tilde{x}_0 = x_0 = \tilde{z}_0 = z_0 = 0$ – caso dei profili ordinari – si ottiene l'equazione, di cui è ben ovvia la discussione:

$$\left[\frac{B_2}{R^2}(K^2 - 1) - N \right] \Big\{ (B_1 + K^2 C) N - \frac{B_1 C}{R^2}(1 - K^2)^2 + e\,[(K^2 - 1)\,e + R]\, N^2 + \\ + \frac{K^2 - 1}{R}(B_1 + C)\, e N \Big\} = 0 .$$

(10) Infatti è

$$R^2 (B_1 + K^2 C) N_{cr} - (B_1 K^2 + C)(B_1 + K^2 C) = B_1 C (1 - K^2)^2 - (B_1 K^2 - B_1 + \\ + B_1 + C)[B_1 + C + C(K^2 - 1) = -(B_1 + C)^2 - (K^2 - 1)(B_1 + C)^2 = - K^2 (B_1 + C)^2 < 0 .$$

Si vede bene ad esempio che, per una eccentricità positiva ($e > 0$), il valore critico di N è più piccolo di quello corrispondente al caso $e = 0$ [cfr. (18)].

Senza insistere ulteriormente sull'equazione (19) si noti per finire che, per $R \to \infty$ così che $K/R \to \pi/l$, essa coincide con l'equazione dei profili sottili ad asse rettilineo [11]:

$$\left(N - \frac{\pi^2}{l^2} B_2\right) \left\{ \left(N - \frac{\pi^2}{l^2} B_1\right) \left[(\beta_c e + \rho_c^2) N - \left(C + \frac{\pi^2}{l^2} C_1\right)\right] - (z_c - e)^2 N^2 \right\} +$$

$$- x_c^2 \left(N - \frac{\pi^2}{l^2} B_1\right) N^2 = 0 ,$$

ove si è posto, in conformità del fatto che il c ntro del taglio è qui indicato con C,

$$\begin{cases} \beta_c = \dfrac{1}{J_x} \displaystyle\int_A z (x^2 + z^2)\, dA - 2 z_c \\[2ex] \rho_c^2 = \dfrac{J_x + J_z}{A} + x_c^2 + z_c^2 . \end{cases}$$

Nel caso $x_c = 0$; $z_c - e = 0$ ovvero $z_c - e$ quantità del 1° ordine, si hanno i ben noti carichi critici

$$N_1 = \frac{\pi^2}{l^2} B_1 \quad , \quad N_2 = \frac{\pi^2}{l^2} B_2 \quad , \quad N_3 = \frac{C + \dfrac{\pi^2}{l^2} C_1}{\rho_c^2 + \beta_c z_c} .$$

(11) Si confronti, in forma diversa, la formola (21) della Nota citata in (2), per $e_x = 0$, $e_z = e$, $k_u = k_w = 0$.