Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, Leonida Eugenio Krivošein

Sopra una classe di problemi al contorno non omogenei per alcuni tipi di equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.1-2, p. 49–53.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_1-2_49_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi matematica. — *Sopra una classe di problemi al contorno non omogenei per alcuni tipi di equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* Nota (*) di DEMETRIO MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN, presentata dal Socio M. PICONE.

1. Una serie di risultati, conseguiti dagli autori da soli oppure in collaborazione, concernenti varie classi di problemi al contorno per le equazioni alle derivate totali [1]–[4], oppure per le equazioni integro-differenziali lineari ordinarie o alle derivate parziali, coadiuvati dalla recente mole di dati e indirizzi di ricerca validamente promossi dal «Colloquio sul trattamento numerico delle equazioni differenziali a derivate parziali, con caratteristiche reali» [5], oppure dai lavori della Scuola di Picone [6], di Ya. V. Bykov [7] ed altri ancora [8], [9], ha condotto gli Autori a considerare qui una nuova classe di problemi al contorno non omogenei per alcuni tipi di equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone [10], [11] e [12].

2. Sia il problema non omogeneo (di Goursat)

$$[D^i u(x,y)]_{x=a} = \varphi_i(y) \;\; ; \;\; [D^i u(x,y)]_{y=c} = \psi_i(x) \qquad (i = 0, 1, \cdots, k-1) \tag{1}$$

per l'equazione integro-differenziale

$$D^k u(x,y) + \lambda \sum_0^{k-1} r_i(x,y) D^i u(x,y) = f(x,y) + \lambda \iint_P \sum_0^m E_i(x,y,\xi,\eta) D^i u(\xi,\eta) \, d\xi \, d\eta , \tag{2}$$

ove $\varphi_i(y)$, $\psi_i(x)$, $r_i(x,y)$, $f(x,y)$, $E_j(x,y,\xi,\eta)$ $(j = 0, 1, \cdots, m)$ sono funzioni note continue nel rettangolo $P = [a,b] \times [c,d]$, λ è un parametro e $D^i u = \frac{\partial^{2i} u(x,y)}{\partial x^i \partial y^i}$ è la derivata totale d'ordine i della funzione $u(x,y)$ nel senso di M. Picone [10], mentre k ed m sono numeri naturali, essendovi $k \geq m$.

Hanno luogo i seguenti teoremi.

TEOREMA I. – *Se* 1) λ *non è un autovalore del nucleo*

$$M(x,y,t,\tau) \equiv \begin{cases} M_1(x,y,t,\tau) + M_2(x,y,t,\tau), & a \leq t \leq x, \; c \leq \tau \leq y, \\ M_2(x,y,t,\tau), & x \leq t \leq b, \; y \leq \tau \leq d, \end{cases}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 31 agosto 1962.

dell'equazione

$$(3) \qquad v(x,y) - \lambda \iint_P M(x,y,t,\tau)\, v(t,\tau)\, dt\, d\tau = F(x,y,\lambda)\,,$$

ove

$$M_1(x,y,t,\tau) = -\sum_0^{k-1} r_i(x,y) \frac{1}{(k-1-i)!^2} [(x-t)(y-\tau)]^{k-1-i},$$

$$M_2(x,y,t,\tau) = \sum_0^m E_i(x,y,t,\tau) \frac{1}{(k-1-i)!^2} \int_a^\xi \int_c^\eta [(\xi-t)(\eta-\tau)]^{k-1-i} \cdot dt\, d\tau\,,$$

$$F(x,y,\lambda) \equiv f(x,y) - \lambda K(x,y)\,,$$

$$K(x,y) \equiv \sum_0^{k-1} r_i(x,y)\, D^i \Phi(x,y) - \iint_P \sum_0^m E_i(x,y,\xi,\eta)\, D^i \Phi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\,,$$

$$Q = \{a \le t \le x \quad ; \quad c \le \tau \le y\}\,,$$

allora il problema (1), (2) *ha sempre una soluzione continua* $2k$ *volte continuamente derivabile, che si rappresenta sotto la forma*

$$(4) \qquad u(x,y) = \Phi(x,y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \iint_Q [(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1} [F(\xi,\eta,\lambda)$$
$$+ \lambda \iint_P R(\xi,\eta,t,\tau,\lambda)\, F(t,\tau,\lambda)\, dt\, d\tau]\, d\xi\, d\eta\,,$$

essendo $\Phi(x,y)$ *una funzione nota che soddisfa le condizioni al contorno*

$$(5) \qquad [D^i \Phi]_{x=a} = \varphi_i(y) \quad ; \quad [D^i \Phi]_{y=c} = \psi_i(x) \qquad (i = 0, 1, \cdots, k-1)$$

e l'equazione omogenea

$$(6) \qquad D^k \Phi(x,y) = 0\,,$$

mentre $R[\cdot]$ *è il nucleo risolvente del nucleo* $M[\cdot]$.

2) *Se* λ *è un autovalore di rango* ν *del nucleo* $M(x,y,t,\tau)$, *allora non è possibile in generale mettere la soluzione del problema* (1), (2) *sotto la forma*

$$(7) \qquad u(x,y) = \Phi(x,y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \int_a^x \int_c^y [(x-t)(y-\tau)]^{k-1} v(t,\tau)\, dt\, d\tau\,.$$

Se però i secondi membri della (5) *appartengono alla molteplicità singolare* S [7], *esiste un insieme infinito di soluzioni del problema* (1), (2) *definito dalla formula*

$$(8) \qquad u(x,y) = \Phi(x,y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \iint_Q [(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1} [z(\xi,\eta)$$
$$+ \sum_1^\nu q_i z_i(\xi,\eta)]\, d\xi\, d\eta\,,$$

ove $z(x, y)$ e $z_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \cdots, \nu)$ *sono, rispettivamente, una soluzione particolare dell'equazione* (3) *e le autofunzioni corrispondenti ad un autovalore* λ *del nucleo* $M(x, y, t, \tau)$.

TEOREMA II. – *Il problema* (1),

$$D^k u(x, y) + \lambda \sum_0^{k-1} r_i(x, y) D^i u(x, y) = f(x, y) + \tag{9}$$

$$+ \lambda \iint_Q \sum_0^m E_i(x, y, t, \tau) D^i u(t, \tau) \, dt \, d\tau,$$

corrispondente al caso in cui $P \equiv Q$, *possiede per ogni valore finito di* λ *una soluzione unica* $2k$ *volte continuamente derivabile, rappresentata sotto la forma*

$$u(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \iint_Q [(x-t)(y-\tau)]^{k-1} \rho(t, \tau, \lambda) \, dt \, d\tau, \tag{10}$$

essendovi

$$\rho(x, y, \lambda) \equiv F(x, y, \lambda) + \lambda \iint_Q R_1(x, y, \xi, \eta, \lambda) F(\xi, \eta, \lambda) \, d\xi \, d\eta,$$

ove $R_1(x, y, \xi, \eta, \lambda)$ *è il nucleo risolvente del nucleo* $M^*(x, y, \xi, \eta)$ *dell'equazione*

$$v(x, y) - \lambda \iint_Q M^*(x, y, t, \tau) v(t, \tau) \, dt \, d\tau = F(x, y, \lambda), \tag{11}$$

conseguita come risultato della sostituzione della (7) *nella* (9).

Nell'ipotesi che λ *non è un autovalore dell'equazione*

$$w(x, y) - \lambda \iint_Q M^*(x, y, \xi, \eta) w(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta \tag{12}$$

$$- \iint_T N(x, y, \xi, \eta) w(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = F_1(x, y, \lambda),$$

i problemi (13), (14), (15), *di cui sotto corrispondenti all'equazione* (9) *posseggono una soluzione unica* $2k$ *volte continuamente derivabile, rappresentata sotto la forma*

$$u_1(x, y) = \Phi_1(x, y) + \frac{1}{(k-1)!^2} \int_\alpha^x \int_\beta^y [(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1} \Delta(\xi, \eta, \lambda) \, d\xi \, d\eta, \tag{16}$$

ove $\Delta(x, y, \lambda)$ *è la soluzione dell'equazione*

$$w(x, y) - \lambda \iint_T M_3(x, y, \xi, \eta) w(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta = F_1(x, y, \lambda), \tag{17}$$

$$M_3(x, y, \xi, \eta) \equiv \begin{cases} M^*(x, y, \xi, \eta) + N(x, y, \xi, \eta), & (x, y) \in Q, \\ N(x, y, \xi, \eta), & (x, y) \in T - Q, \end{cases}$$

$$(13)\quad [D^i u(x,y)]_{x=\alpha}=\rho_i(y) \quad , \quad [D^i u(x,y)]_{y=\beta}=\mu_i(x) \, , \quad (i=0,1,\cdots,k-1),$$

$$(14)\quad [D^i u(x,y)]_{x=a}=\varphi_i(y) \quad , \quad [D^i u(x,y)]_{y=\beta}=\mu_i(x) \, , \quad (i=0,1,\cdots,k-1),$$

$$(15)\quad [D^i u(x,y)]_{x=\alpha}=\rho_i(y) \quad , \quad [D^i u(x,y)]_{y=c}=\psi_i(x) \, , \quad (i=0,1,\cdots,k-1),$$

mentre la funzione $\Phi_1(x,y)$ *è la soluzione del problema* (13) *in corrispondenza all'equazione* (6) *e le funzioni note* $M^*[\cdot]$, $N[\cdot]$ *e* $F_1[\cdot]$ *spettano all'equazione integrale* (12), *risultata dall'applicazione alla trasformazione integrale*

$$(18)\qquad u(x,y)=\Phi_1(x,y)+\frac{1}{(k-1)!^2}\int_\alpha^x\int_\beta^y[(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1}\,w(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

dell'operatore integro-differenziale che figura in (9), *allorché* T *risulta un dominio d'integrazione costante e* Q, $Q\subset T$, *dominio variabile.*

Se λ *è un autovalore di rango* ν *dell'equazione* (12) *allora i problemi considerati non hanno in generale soluzioni rappresentabili sotto la forma* (18).

Nel caso però in cui i secondi membri delle (13)–(15) *appartengono alla varietà singolare* S, *l'insieme delle soluzioni del problema proposto è dato dalla formola*

$$(19)\qquad u(x,y)=\Phi_1(x,y)+\frac{1}{(k-1)!^2}\int_\alpha^x\int_\beta^y[(x-\xi)(y-\eta)]^{k-1}\,[w_0(\xi,\eta,\lambda)$$
$$+\sum_1^\nu q_i\,w_i(\xi,\eta,\lambda)]\,d\xi\,d\eta\,,$$

ove $w_0(\xi,\eta,\lambda)$ *e* $w_i(\xi,\eta,\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,\nu)$ *sono, rispettivamente, una soluzione particolare dell'equazione* (17) *e le autofunzioni del nucleo* $M_3(x,y,\xi,\eta)$, *allorché* $q_1, q_2, \cdots, q_\nu$ *sono costanti arbitrarie.*

3. I risultati conseguiti, pur contenendo vari casi particolari notevoli, come lo è, ad esempio, il problema (1) e l'equazione alle derivate totali di Picone

$$(20)\qquad D^k u(x,y)+\lambda\sum_0^{k-1} r_i(x,y)\,D^i u(x,y)=f(x,y)\,,$$

corrispondente al caso in cui si pone nella (2)

$$E_i(x,y,\xi,\eta)\equiv 0 \quad , \quad (i=0,1,\cdots,m) \quad , \quad (\xi,\eta)\in P,$$

permettono la risoluzione tramite il metodo escogitato dei problemi (1), (13)–(15) per le equazioni lineari integro-differenziali della forma

$$(21)\qquad D^k u(x,y)+\lambda\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1} r_{ij}(x,y)\,\frac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial x^i\,\partial y^j}=f(x,y)$$
$$+\lambda\iint_Q\sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{p}E_{ij}(x,y,\xi,\eta)\,\frac{\partial^{i+j}u(\xi,\eta)}{\partial\xi^i\,\partial\eta^j}\,d\xi\,d\eta\,,\ p\le k\,,$$

oppure

$$D^k u(x, y) + \lambda \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} r_{ij} \frac{\partial^{i+j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} = \tag{22}$$

$$f(x, y) + \lambda \iint_Q \sum_{j=0}^{p} \sum_{i=0}^{p} E_{ij}(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial^{i+j} u(\xi, \eta)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} d\xi \, d\eta ,$$

ed altri ancora.

Una Nota di prossima pubblicazione sarà consacrata all'applicazione del metodo di approssimazioni successive ed alla valutazione degli errori commessi nella risoluzione di varie classi di problemi di qui sopra.

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. MANGERON, *O zadačah tipa Dirichlet dlja uravnenii v «polnyh proizvodnyh»* (*Sopra i problemi di Dirichlet per le equazioni alle derivate totali*), « Bul. Inst. Politehn. Iași », S. N., *3* (7), fasc. 3–4, pp. 49–52 (1957).

[2] L. E. KRIVOŠEIN, *Približennye metody rešenia obyknovennyh lineinyh integro-differentzial' nyh uravnenii* (*Metodi approssimativi di risoluzione delle equazioni lineari ordinarie integro-differenziali*), « Akademia Nauk Kirgizskoi SSR », Frunze, 1962, 184 pp.

[3] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*), « Atti Accad. Naz. dei Lincei », Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat., ser. VIII, vol. XXXI, fasc. 1–2, pp. 27–32 (1961).

[4] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sur l'évaluation des erreurs de détermination des solutions d'une classe d'équations intégro-différentielles aux dérivées totales*, « C. R. Acad. Sci., Paris », 235, N° 11, pp. 1190–1192 (1961).

[5] *Symposium on the Numerical Treatment of partial differential Equations with real characteristics.* Proceedings of the Rome Symposium (28–29–30 January 1959) organized by the Provisional International Computation Centre. Roma, Libreria Eredi Virgilio Veschi, 1959, 158 pp.

[6] M. PICONE, Serie di lavori sul tema «*Ciò che ha dato e ciò che può dare l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*». Pubblicazioni dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, Roma 1937 e sgg.

[7] Ya. V. BYKOV, *O nekotoryh zadačah teorii integro-differentzial'nyh uravnenii* (*Sopra alcuni problemi concernenti la teoria delle equazioni integro-differenziali*), Kirg. Gos. Univ., Frunze, 1957, 327 pp.

[8] *Partial differential equations and continuum mechanics*, University of Wisconsin Press, Madison. Wis., 1961.

[9] *Premier* (Louvain, 17–19 décembre 1953) *et Second Colloque* (Bruxelles, 24–26 mai 1954) *sur les équations aux dérivées partielles.* Centre Belge de Recherches Mathématiques. Georges Thone, Liège, Masson C[ie], Paris 1954, 129 pp. e 1955, 131 pp.

[10] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, « Ann. Sci. de l'Univ., Jassy », I Section (Math., Phys., Chimie), XXVI, 1, pp. 183–232 (1940).

[11] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Approximation par les polynômes de Bernstein des solutions de certains problèmes à la frontière pour les équations intégrodifférentielles d'ordre supérieur*, « C. R. Acad. Sci., Paris », 254, N° 21, pp. 3624–3626 (1962).

[12] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Problemi di Goursat e di Dirichlet per una classe di equazioni integro-differenziali a derivate totali* (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*), « Rend. Accad. Sci. fis. e mat. », Napoli, ser. 4ª, XXVIII, pp. 213–224 (1961).