
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MARIA TERESA BONARDI

**Sulle serie ∞^1 di piani appartenenti alla V_4^6 di C.
Segre**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 33 (1962), n.1-2, p. 31-36.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_1-2_31_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Sulle serie ∞^1 di piani appartenenti alla V_4^6 di C. Segre.* Nota (*) di MARIA TERESA BONARDI, presentata dal Socio E. TOGLIATTI.

1. È noto che la V_4^6 di S_8 che rappresenta, al modo di C. Segre, le coppie di punti estratti da due piani, può essere caratterizzata tra le V_4 immerse $\mathcal{C}^{(2)}$ nello spazio S_8 dalla proprietà di avere gli S_4 tangenti appoggiati a quattro piani a tre a tre indipendenti, su ciascuno dei quali sia due la dimensione dell'insieme dei punti di appoggio ⁽¹⁾.

In questa Nota ottengo una caratterizzazione del tutto analoga per le serie semplicemente infinite di piani d'una V_4^6 di C. Segre, dimostrando il seguente

TEOREMA. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà reale a tre dimensioni (non conica e non composta di spazi S_3), immersa $\mathcal{C}^{(1)}$ nello spazio S_8 , sia una ∞^1 di piani di uno dei due sistemi di una V_4^6 di C. Segre, è che tutti i suoi spazi tangenti incontrino quattro piani di S_8 a tre a tre indipendenti.*

La necessità è ovvia. Basta dunque provare la sufficienza.

2. Se $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ sono quattro piani a tre a tre indipendenti di uno spazio proiettivo S_8 , si può sempre scegliere ⁽²⁾ il sistema di riferimento per le coordinate proiettive omogenee x_i dei punti in modo che essi risultino i piani congiungenti rispettivamente le terne di punti:

$A_0(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), A_1(0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), A_2(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0);$
 $A_3(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0), A_4(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0), A_5(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0);$
 $A_6(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0), A_7(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), A_8(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1);$
 $M_0(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0), M_1(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1), M_2(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1).$

Ciò premesso, sia V_3 una varietà reale a tre dimensioni appartenente ad uno S_8 , ma non ad uno spazio inferiore, rappresentata parametricamente da equazioni del tipo:

$$\rho x_i = \varphi_i(\alpha, \beta, \gamma) \quad (i = 0, 1, \dots, 8)$$

con $\varphi_i(\alpha, \beta, \gamma)$ funzioni continue in un aperto di R^3 ed ivi dotate di derivate prime continue.

(*) Percepita all'Accademia il 23 luglio 1962.

(1) D. GALLARATI, *Intorno a certe V_4 di S_8 ed una proprietà caratteristica della V_4^6 che rappresenta le coppie di punti di due piani*, « Ricerche di matematica », VIII (1959); *Sulle V_4 di S_8 i cui S_4 tangenti si appoggiano a piani assegnati*, « Riv. Matem. Univ. Parma » (2), 2 (1961).

Supponiamo che gli S_3 tangenti della varietà siano tutti appoggiati al piano π_3 : questo implica che le sei funzioni $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ siano sei integrali di un'equazione alle derivate parziali del tipo:

$$(1) \quad \lambda X + \mu X^\alpha + \nu X^\beta + \rho X^\gamma = 0$$

ove X è la funzione incognita,

$$X^\alpha = \frac{\partial X}{\partial \alpha}, \quad X^\beta = \frac{\partial X}{\partial \beta}, \quad X^\gamma = \frac{\partial X}{\partial \gamma};$$

e λ, μ, ν, ρ sono funzioni opportune di α, β, γ . Perciò se τ è un integrale particolare, non identicamente nullo, della (1) risulta:

$$\varphi_i = \tau \psi_i(g, h) \quad (i = 0, 1, \dots, 5)$$

con g ed h funzioni di α, β, γ ⁽²⁾. V_3 può allora rappresentarsi con equazioni del tipo:

$$(2) \quad \rho x_i = \psi_i(g, h) \quad ; \quad \rho x_k = \chi_k(\alpha, \beta, \gamma) \quad (i = 0, 1, \dots, 5; k = 6, 7, 8).$$

Si può escludere senz'altro che nelle (2) g ed h siano costanti perché in tal caso V_3 sarebbe un S_3 . Se g ed h dipendono da uno solo dei parametri α, β, γ le (2) sono della forma:

$$(3) \quad \rho x_i = \varphi_i(\alpha) \quad ; \quad \rho x_k = \varphi_k(\alpha, \beta, \gamma) \quad (i = 0, 1, \dots, 5; k = 6, 7, 8);$$

e gli S_3 tangenti della varietà segano π_3 secondo rette. Se invece g ed h dipendono complessivamente da almeno due dei parametri α, β, γ , si può supporre che questi siano α e β e si può eseguire il cambiamento di parametri: $g = \alpha^*, h = \beta^*, \gamma = \gamma^*$. Continuando a chiamare α, β, γ i nuovi parametri, si ottiene per V_3 una rappresentazione parametrica della forma:

$$(3') \quad \rho x_i = \varphi_i(\alpha, \beta) \quad ; \quad \rho x_k = \varphi_k(\alpha, \beta, \gamma) \quad (i = 0, 1, \dots, 5; k = 6, 7, 8).$$

Sia nel caso (3) che nel caso (3'), per l'ipotesi che V_3 non stia in spazi di dimensione inferiore ad 8, deve essere $\varphi_0 \not\equiv 0$, e φ_1/φ_0 non costante; inoltre almeno una delle funzioni $\varphi_6, \varphi_7, \varphi_8$ deve dipendere da γ . Supposto come è lecito $\varphi_6' \not\equiv 0$, con il cambiamento di parametri

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \alpha^*, \quad \beta = \beta^*, \quad \frac{\varphi_6}{\varphi_0} = \gamma^*$$

le (3) e (3') vengono ridotte rispettivamente alla forma:

$$(4) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 : x_8 = 1 : \alpha : \eta_2(\alpha) : \eta_3(\alpha) : \eta_4(\alpha) : \eta_5(\alpha) : \gamma : \\ : \eta_7(\alpha\beta\gamma) : \eta_8(\alpha\beta\gamma)$$

(2) Se τ è un integrale non identicamente nullo della (1) e φ è un qualunque altro integrale della stessa equazione, posto $\varphi = \tau\psi$, dalla (1) si ricava che ψ deve essere un integrale dell'equazione: $\mu\psi^\alpha + \nu\psi^\beta + \rho\psi^\gamma = 0$. Ne segue che esistono due funzioni $g(\alpha, \beta, \gamma)$ ed $h(\alpha, \beta, \gamma)$ tali che $\psi = \psi(g, h)$ e quindi $\varphi = \tau\psi(g, h)$. Cfr. ad esempio: A. R. FORSYTH, *Trattato delle equazioni differenziali* (traduzione di A. Arbicone), Livorno 1902, p. 242.

ed alla forma:

$$(4') \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 : x_8 = 1 : \alpha : \xi_2(\alpha, \beta) : \xi_3(\alpha, \beta) : \xi_4(\alpha, \beta) : \xi_5(\alpha, \beta) : \\ : \gamma : \xi_7(\alpha, \beta, \gamma) : \xi_8(\alpha, \beta, \gamma).$$

Nelle (4) inoltre, una almeno delle due funzioni η_7 ed η_8 dovendo dipendere da β , si può supporre $\eta_7 = \beta$.

3. Le varietà (4) vanno escluse perché, come è immediato verificare, gli S_3 tangenti di queste varietà non sono appoggiati al piano π_2 . Per le varietà (4') le condizioni perché gli S_3 tangenti incontrino π_2 sono: $\xi_2^\beta = \xi_7^\beta = \xi_8^\beta = 0$. Dunque le V_3 di S_8 (non contenute in spazi di dimensione inferiore) i cui S_3 tangenti si appoggiano ai due piani π_3 e π_2 sono tutte e sole quelle rappresentabili con equazioni parametriche della forma:

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 : x_8 = 1 : \alpha : \zeta_2(\alpha) : \zeta_3(\alpha, \beta) : \zeta_4(\alpha, \beta) : \zeta_5(\alpha, \beta) : \\ : \gamma : \zeta_7(\alpha, \gamma) : \zeta_8(\alpha, \gamma).$$

D'altra parte, poiché non può essere $\zeta_3^\beta = \zeta_4^\beta = \zeta_5^\beta = 0$, si può supporre $\zeta_3^\beta \neq 0$ ed assumere come equazioni parametriche di V_3 le seguenti:

$$(5) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 : x_8 = 1 : \alpha : \vartheta_2(\alpha) : \beta : \vartheta_4(\alpha, \beta) : \vartheta_5(\alpha, \beta) : \\ : \gamma : \vartheta_7(\alpha, \gamma) : \vartheta_8(\alpha, \gamma).$$

4. Imponiamo ora agli S_3 tangenti della varietà (5) di appoggiarsi al piano π_1 ; questa condizione implica che le quattro funzioni $\vartheta_i(\alpha, x)$ ($i = 4, 5, 7, 8$) siano soluzioni di un'equazione differenziale alle derivate parziali del tipo:

$$(6) \quad \lambda(X - xX^x) + \mu X^\alpha = 0$$

con λ, μ funzioni di α, β, γ .

Se $\lambda \equiv 0$ deve essere $\vartheta_4^\alpha = \vartheta_5^\alpha = \vartheta_7^\alpha = \vartheta_8^\alpha = 0$; e le (5) divengono:

$$(7) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 : x_8 = 1 : \alpha : \vartheta_2(\alpha) : \beta : \vartheta_4(\beta) : \vartheta_5(\beta) : \gamma : \vartheta_7(\gamma) : \vartheta_8(\gamma).$$

Se $\lambda \neq 0$ si possono supporre non identicamente nulle le funzioni $\vartheta_4^\alpha, \vartheta_5^\alpha, \vartheta_7^\alpha, \vartheta_8^\alpha$ perché se fosse, per esempio, $\vartheta_4^\alpha \equiv 0$, si avrebbe $\vartheta_4 = \beta \vartheta_4^\beta$; onde ϑ_4 sarebbe una funzione lineare di β ; e V_3 sarebbe contenuta in un iperpiano. Perciò sostituendo nella (6) al posto della funzione incognita X successivamente $\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_7, \vartheta_8$ si possono ricavare le relazioni seguenti:

$$\frac{\beta \vartheta_4^\beta - \vartheta_4}{\vartheta_4^\alpha} = \frac{\beta \vartheta_5^\beta - \vartheta_5}{\vartheta_5^\alpha} = \frac{\gamma \vartheta_7^\gamma - \vartheta_7}{\vartheta_7^\alpha} = \frac{\gamma \vartheta_8^\gamma - \vartheta_8}{\vartheta_8^\alpha} = \frac{\mu}{\lambda}$$

le quali implicano che μ/λ sia funzione della sola variabile α .

In questa ipotesi, se $\mu \neq 0$, l'integrale generale della (6) è $X = xH[F(\alpha) + \log x]$, con $F(\alpha)$ funzione opportuna e non costante⁽³⁾. Risulta dunque:

$$\vartheta_4 = \beta H_4[F(\alpha) + \log \beta] \quad ; \quad \vartheta_5 = \beta H_5[F(\alpha) + \log \beta] ; \\ \vartheta_7 = \gamma H_7[F(\alpha) + \log \gamma] \quad ; \quad \vartheta_8 = \gamma H_8[F(\alpha) + \log \gamma] ;$$

(3) Cfr. nota (2) osservando che x è un integrale particolare della (6).

e le equazioni parametriche di V_3 , scegliendo opportunamente i parametri, possono essere ridotte alla forma:

$$(8) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 : x_8 = \alpha : A_1(\alpha) : A_2(\alpha) : \beta : B_1(\beta) : B_2(\beta) : \\ : \gamma : C_1(\gamma) : C_2(\gamma).$$

Se $\mu \equiv 0$, risulta invece:

$$\vartheta_i = \beta \omega_i(\alpha) \quad ; \quad \vartheta_k = \gamma \omega_k(\alpha) \quad (i = 4, 5; k = 7, 8)$$

e per V_3 si ottengono equazioni parametriche del tipo:

$$(9) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 : x_8 = 1 : \alpha : \omega_2(\alpha) : \beta : \beta \omega_4(\alpha) : \beta \omega_5(\alpha) : \\ : \gamma : \gamma \omega_7(\alpha) : \gamma \omega_8(\alpha).$$

Per le V_3 di S_8 i cui S_3 tangenti si appoggiano ai tre piani π_1, π_2, π_3 si sono così trovati tre tipi possibili di rappresentazioni parametriche: (7), (8), (9); il primo tipo però rientra nel secondo, perché le (8) diventano del tipo (7) se $A_1(\alpha)$ [oppure $A_2(\alpha)$] si riduce ad 1; ciò esige che A_1^α e A_2^α non siano contemporaneamente nulle, caso che va escluso.

5. Consideriamo la varietà (8) ed imponiamo ai suoi S_3 tangenti di appoggiarsi al piano π_4 . Ciò avviene se e solo se esistono due funzioni λ e μ tali che risulti:

$$(10) \quad \begin{cases} \lambda(B_1 - A_1 + \alpha A_1^\alpha - \beta B_1^\beta) + \mu(B_1^\beta - A_1^\alpha) = 0 \\ \lambda(B_2 - A_2 + \alpha A_2^\alpha - \beta B_2^\beta) + \mu(B_2^\beta - A_2^\alpha) = 0 \\ \lambda(C_1 - A_1 + \alpha A_1^\alpha - \gamma C_1^\gamma) + \mu(C_1^\gamma - A_1^\alpha) = 0 \\ \lambda(C_2 - A_2 + \alpha A_2^\alpha - \gamma C_2^\gamma) + \mu(C_2^\gamma - A_2^\alpha) = 0. \end{cases}$$

Le (10) possono coesistere se e solo se la matrice:

$$\begin{vmatrix} B_1 - A_1 + \alpha A_1^\alpha - \beta B_1^\beta & B_1^\beta - A_1^\alpha \\ B_2 - A_2 + \alpha A_2^\alpha - \beta B_2^\beta & B_2^\beta - A_2^\alpha \\ C_1 - A_1 + \alpha A_1^\alpha - \gamma C_1^\gamma & C_1^\gamma - A_1^\alpha \\ C_2 - A_2 + \alpha A_2^\alpha - \gamma C_2^\gamma & C_2^\gamma - A_2^\alpha \end{vmatrix}$$

ha caratteristica ≤ 1 . In particolare dovrà essere:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} B_1 - A_1 + \alpha A_1^\alpha - \beta B_1^\beta & B_1^\beta - A_1^\alpha \\ C_1 - A_1 + \alpha A_1^\alpha - \gamma C_1^\gamma & C_1^\gamma - A_1^\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Questa condizione permette di escludere senz'altro le varietà del tipo (8) dalle nostre considerazioni. Infatti si possono intanto escludere le varietà per cui $B_1^\beta - A_1^\alpha = 0$, perché in tal caso A_1 e B_1 sarebbero funzioni lineari (rispettivamente di α e di β), e ci sarebbe almeno un S_6 contenente V_3 . Per ana-

loghe ragioni si escludono le varietà per cui $C_I^\gamma - A_I^\alpha = 0$. Limitandosi alle rimanenti, dalla (11) si ricava:

$$\frac{B_I - A_I + \alpha A_I^\alpha - \beta B_I^\beta}{B_I^\beta - A_I^\alpha} = \frac{C_I - A_I + \alpha A_I^\alpha - \gamma C_I^\gamma}{C_I^\gamma - A_I^\alpha} = h(\alpha);$$

e quindi:

$$(12) \quad (B_I - \beta B_I^\beta) - \{A_I - [h(\alpha) + \alpha] A_I^\alpha\} = h(\alpha) B_I^\beta$$

$$(13) \quad (C_I - \gamma C_I^\gamma) - \{A_I - [h(\alpha) + \alpha] A_I^\alpha\} = h(\alpha) C_I^\gamma.$$

La (12) implica, come si riconosce senza difficoltà, che le funzioni B_I^β e $B_I - \beta B_I^\beta$, oppure le funzioni $h(\alpha)$ e $A_I - [h(\alpha) + \alpha] A_I^\alpha$, siano costanti; ossia in ogni caso che B_I sia funzione lineare di β . Analogamente dalla (13) si ricava che C_I deve essere funzione lineare di γ . Dunque tutte le varietà del tipo (8) che soddisfano la (11) sono contenute in spazi di dimensione inferiore ad 8.

6. Veniamo ora alle V_3 del tipo (9). Condizione necessaria e sufficiente affinché gli S_3 tangenti di una tale varietà si appoggino al piano π_4 , è che le funzioni $\beta\omega_4 - \alpha$, $\beta\omega_5 - \omega_2$, $\gamma\omega_7 - \alpha$, $\gamma\omega_8 - \omega_2$ siano soluzioni di una equazione differenziale della forma:

$$\lambda [X + (1 - \beta) X^\beta + (1 - \gamma) X^\gamma] + \mu X^\alpha = 0$$

con λ e μ funzioni di α , β , γ . Per le funzioni ω_2 , ω_4 , ω_5 , ω_7 , ω_8 si ottengono dunque le condizioni:

$$(14) \quad \begin{cases} \lambda (\omega_4 - \alpha) + \mu (\beta\omega_4^\alpha - 1) = 0 \\ \lambda (\omega_5 - \omega_2) + \mu (\beta\omega_5^\alpha - \omega_2^\alpha) = 0 \\ \lambda (\omega_7 - \alpha) + \mu (\gamma\omega_7^\alpha - 1) = 0 \\ \lambda (\omega_8 - \omega_2) + \mu (\gamma\omega_8^\alpha - \omega_2^\alpha) = 0. \end{cases}$$

Poiché le due espressioni $\beta\omega_4^\alpha - 1$ e $\gamma\omega_7^\alpha - 1$ sono certo non nulle, nelle (14) deve essere $\lambda \neq 0$ e μ/λ funzione della sola variabile α . D'altra parte, poiché anche le ω_i ($i = 2, 4, 5, 7, 8$) dipendono soltanto da α , le (14) hanno senso solo se è $\mu \equiv 0$. Risulta quindi: $\omega_4 = \omega_7 = \alpha$; $\omega_2 = \omega_5 = \omega_8$ e le equazioni parametriche di V_3 divengono:

$$(15) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 : x_8 = 1 : \alpha : \omega(\alpha) : \beta : \beta\alpha : \beta\omega(\alpha) : \gamma : \gamma\alpha : \gamma\omega(\alpha)$$

con $\omega(\alpha)$ funzione arbitraria.

Su questa V_3 le superfici $\alpha = \text{cost.}$ sono dei piani.

Considerata la V_4^6 di C. Segre, prodotto di due piani, di equazioni parametriche:

$$(16) \quad x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_7 : x_8 = 1 : \alpha : \delta : \beta : \beta\alpha : \beta\delta : \gamma : \gamma\alpha : \gamma\delta$$

e le sue due schiere di piani, si vede subito che una di esse contiene $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$, e che le (15), qualunque sia la funzione $\omega(\alpha)$, rappresentano un sistema di ∞^1 piani contenuti nell'altra.

Il teorema del n. 1 è così completamente dimostrato.

7. Se Σ' e Σ'' sono le due schiere di piani della V_4^6 (16), e V_3 è una varietà non situata in spazi di dimensione inferiore ad 8 e composta di ∞^1 piani di Σ' , i piani di Σ'' sono incidenti, come è ovvio, a tutti gli spazi tangenti di V_3 . Dimostro ora che, oltre a quelli di Σ'' , non esistono in S_8 altri piani che godano di questa proprietà. Sia σ_1 un tale piano: esso non può appartenere a Σ' perché, come subito si verifica analiticamente, nelle ipotesi attuali nessun piano di questo sistema è incidente a tutti gli spazi tangenti di V_3 . Di conseguenza, detti $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ tre piani scelti genericamente in Σ'' (quindi congiunti dall' S_8 e sghembi con σ_1), si può ripetere per i quattro piani σ_i quanto s'è detto per i piani π_i , pervenendo ad una V_4^6 di C. Segre passante per i piani σ_i e per la V_3 . Basta ora osservare che gli ∞^1 piani di V_3 (per ipotesi non situati in uno stesso iperpiano) individuano ⁽⁴⁾ la V_4^6 di C. Segre che li contiene, per concludere che σ_1 appartiene al sistema Σ'' .

(4) Si ricordi che una V_4^6 di C. Segre è il luogo dei piani che si appoggiano a quattro piani generici di una delle sue due schiere.