Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Witold Pogorzelski

Étude de la continuité des solutions du système parabolique dependant d'un paramètre. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.1-2, p. 22–30.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_1-2_22_0¿

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Étude de la continuité des solutions du système parabolique dépendant d'un paramètre* [(*)]. Nota II di WITOLD POGORZELSKI, presentata [(**)] dal Socio M. PICONE.

§ 3. – PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES ANALOGIQUES À L'INTÉGRALE DE POISSON–WEIERSTRASS.

THÉORÈME 2. – Si les coefficients du système (1) vérifient les conditions (3), (4), (5′) dans la région (2), si les fonctions $f_\beta(X)$, définies dans l'espace E, vérifient l'inégalité

$$|f_\beta(X)| \leq M_f \exp[b\,|XX_0|] \tag{46}$$

(M_f et b étant des constantes positives données) et sont intégrables dans tout domaine mesurable et borné dans E, alors les intégrales (14) analogiques à l'intégrale de Poisson–Weierstrass et leurs dérivées d'ordre $m \leq M - 1$ possèdent une certaine régularité de la continuité par rapport au paramètre λ, dans la région $[X \in E\,,\ 0 < t \leq T\,,\ -R \leq \lambda \leq +R]$, exprimée par les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} &|D_X^{(m)}[J_\alpha^{(\lambda)}(X\,,t)] - D_X^{(m)}[J_\alpha^{(\lambda')}(X\,,t)]| \\ &\qquad \leq \text{Const}\, M_f\, t^{-\mu_m} \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda} \end{aligned} \tag{47}$$

où les constantes positives h_λ et μ_m sont choisies arbitrairement dans les intervalles

$$\left\{\begin{aligned} &0 < h_\lambda < \min(h\,, Mh') \\ &\frac{m}{M} < \mu_m < 1 \end{aligned}\right. \qquad (m = 0\,, 1\,, \cdots, M-1)\,. \tag{47'}$$

Les coefficient positif *const* dépend du choix des constantes h_λ et μ_m, mais ne dépend pas des fonctions f_β.

Démonstration. – D'après la formule (8), nous pouvons écrire les intégrales (14) sous la forme d'une somme

$$J_\alpha^{(\lambda)}(X\,,t) = \overset{*}{J}{}_\alpha^{(\lambda)}(X\,,t) + \overset{**}{J}{}_\alpha^{(\lambda)}(X\,,t)$$

(*) Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences.

(**) Nella seduta del 12 giugno 1962.

des intégrales

$$(48)\qquad \overset{*}{J}{}^{(\lambda)}_{\alpha}(X,t)=\iiint\limits_{E}\sum_{\beta=1}^{N}W^{(\lambda)\,Y,0}_{\alpha\beta}(X,t;Y,0)\,f_{\beta}(Y)\,dY$$

$$(49)\qquad \overset{**}{J}{}^{(\lambda)}_{\alpha}(X,t)=\int\limits_{0}^{t}\iiint\limits_{E}\sum_{\beta=1}^{N}W^{(\lambda)\,Y,\tau)}_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)\,\sigma^{(\lambda)}_{\beta}(Y,\tau)\,dY\,d\tau$$

où l'on a posé

$$(50)\qquad \sigma^{(\lambda)}_{\beta}(Y,\tau)=\iiint\limits_{E}\sum_{\gamma=1}^{N}\Phi^{(\lambda)}_{\beta\gamma}(Y,\tau;Z,0)\,f_{\gamma}(Z)\,dZ\,.$$

On étudiera les intégrales (48) d'une façon analogique que l'intégrale (19), sans faire l'intégration par rapport à la variable τ. On constate que les fonctions (48) et leurs dérivées d'ordre $m\leq M-1$ vérifient les inégalités de la forme

$$(51)\qquad \left|D^{(m)}_{X}[\overset{*}{J}{}^{(\lambda)}_{\alpha}(X,t)]-D^{(m)}_{X}[\overset{*}{J}{}^{(\lambda')}_{\alpha}(X,t)]\right|$$
$$\leq \text{Const}\,M_f\cdot t^{-\mu_m}\exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda-\lambda'|)]^{h_\lambda}$$
$$(m=0,1,\cdots,M-1)$$

La seconde intégrale (49) est une composante du quasi-potentiel de charge spatiale de densité (50). On étudiera cette densité d'une façon analogique que la densité (20) et on arrive à l'inégalité semblable à (43) (sans faire l'intégration par rapport à variable τ)

$$(52)\qquad \left|\sigma^{(\lambda)}_{\beta}(Y,\tau)-\sigma^{(\lambda')}_{\beta}(Y,\tau)\right|\leq \text{Const}\,M_f\,\tau^{-\tilde{\mu}}\exp[b\,|YX_0|]\,[\omega_A(|\lambda-\lambda'|)]^{h_\lambda}$$

h_λ et $\tilde{\mu}$ étant choisis dans les intervalles (38) et (39). Nous en concluons, d'une façon analogique que pour l'intégrale (19), l'inégalité suivante pour les intégrales (49) et leurs dérivées

$$(53)\qquad \left|D^{(m)}_{X}[\overset{**}{J}{}^{(\lambda)}(X,t)]-D^{(m)}_{X}[\overset{**}{J}{}^{(\lambda')}(X,t)]\right|$$
$$\leq \text{Const}\,M_f\,t^{1-\mu_m-\tilde{\mu}}\exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda-\lambda'|)]^{h_\lambda}$$

$(m=0,\cdots,M-1)$. En rapprochant les résultats (51) et (53), on arrive à la conclusion (47) du théorème 2.

Remarque. – Dans le cas $m=0$ ont peut établir une inégalité de Hölder meilleure que l'inégalité (51), notamment ne contenant pas le facteur non borné $t^{-\mu_0}$, où $0<\mu_0<1$. Considérons donc l'inégalité

$$(54)\qquad \left|W^{(\lambda)\,Y,\tau}_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)-W^{(\lambda')\,Y,\tau}_{\alpha\beta}(X,t;Y,\tau)\right|$$
$$\leq \frac{C}{(t-\tau)^{n/M}}\exp\left[-\frac{c\,|XY|^{q}}{\sqrt[M-1]{t-\tau}}\right]\omega_A(|\lambda-\lambda'|)$$

résultant de l'inégalité établie dans notre travail [3] (page 162, formule 37); C et c sont des constantes positives, $q = \frac{M}{M-1}$. Décomposons la différence

$$(55) \qquad \overset{*}{J}{}_{\alpha}^{(\lambda)}(X,t) - \overset{*}{J}{}_{\alpha}^{(\lambda')}(X,t) =$$

$$\iiint\limits_{E} \sum_{\beta=1}^{N} [W_{\alpha\beta}^{(\lambda)Y,0}(X,t;Y,0) - W_{\alpha\beta}^{(\lambda')Y,0}(X,t;Y,0)] f_{\beta}(Y)\, dY = I^{(K)} + I^{(E-K)}$$

en somme d'intégrales étendues à la sphère K, centrée en X et de rayon fixé R_0, et au domaine extérieur $E - K$.

En vertu de l'inégalité (54) et (46), nous aurons une limitation

$$(56) \quad |I^{(K)}| \leq CM_f e^{bR_0} e^{b|XX_0|} \iiint\limits_{K} t^{-n/M} \exp\left[-\frac{c|XY|^q}{\sqrt[M-1]{t}}\right] dY \cdot \omega_A(|\lambda - \lambda'|) =$$

$$Ce^{bR_0} M_f \omega_n e^{b|XX_0|} \omega_A(|\lambda-\lambda'|) \int_0^{R_0} t^{-n/M} r^{n-1} \exp\left[-\frac{cr^q}{\sqrt[M-1]{t}}\right] dr$$

$$\leq \frac{C(M-1)}{Mc^{n/q}} e^{bR_0} \omega_n M_f \exp[b|XX_0|]\, \Gamma\left[\frac{n(M-1)}{M}\right] \omega_A(|\lambda-\lambda'|).$$

Quant à l'intégrale étendue au domaine $E - K$, nous pouvons écrire

$$(57) \qquad |I^{(E-K)}| \leq CM_f e^{b|XX_0|} \omega_A(|\lambda - \lambda'|) \cdot$$

$$\cdot \iiint\limits_{E-K} t^{-n/M} \exp\left[-\frac{c' R_0^q}{\sqrt[M-1]{t}}\right] \exp\left[-\frac{c''|XY|^q - b\sqrt[M-1]{T}\,|XY|}{\sqrt[n-1]{T}}\right] dY$$

en décomposant le nombre c en somme $c' + c''$ des deux nombres positifs. Or, on peut fixer R_0 suffisamment grand pour qu'on ait

$$\frac{c''|XY|^q - b\sqrt[M-1]{T}\,|XY|}{\sqrt[M-1]{T}} \geq p\,|XY|$$

si $|XY| \geq R_0$, p étant un nombre positif, en outre le produit

$$t^{-n/M} \exp\left[-\frac{c' R_0^q}{\sqrt[M-1]{t}}\right]$$

tend vers zéro si $t \to 0$, donc l'intégrale dans (57) existe et possède une borne positive déterminée, si $t \to 0$. En somme, la différence (55) vérifie l'inégalité

$$(58) \qquad |\overset{*}{J}{}_{\alpha}^{(\lambda)}(X,t) - \overset{*}{J}{}_{\alpha}^{(\lambda')}(X,t)| \leq \text{Const}\, M_f \exp[b|XX_0|]\, \omega_A(|\lambda - \lambda'|)$$

dans la région $(X \in E\,;\, 0 < t \leq T\,;\, \lambda, \lambda' \in (-R, +R))$. Quant à la différence (53) pour $m = 0$, on peut fixer μ_0 suffisamment petit pour que

$1 - \mu_0 - \tilde{\mu} > 0$, donc en rapprochant les résultats nous concluons que les intégrales de Poisson–Weierstrass (14) vérifient l'inégalité de Hölder

$$(59) \qquad |J_\alpha^{(\lambda)}(X,t) - J_\alpha^{(\lambda')}(X,t)| \leq \mathrm{Const} M_f \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda}$$

au coefficient borné si $t \to 0$.

Nous passons maintenant à l'étude de la continuité par rapport au paramètre λ des dérivées d'ordre le plus élevé M des intégrales (14). Cette étude exige des considérations plus délicates. L'existence des dérivées d'ordre M est assurée grâce aux propriétés suivantes de la densité (50)

$$(60) \qquad |\sigma_\beta^{(\lambda)}(Y,\tau)| \leq \mathrm{Const.}\, M_f \tau^{-\mu^*} \exp[b\,|YX_0|]$$

$$(61) \qquad |\sigma_\beta^{(\lambda)}(Y,\tau) - \sigma_\beta^{(\lambda)}(Y_1,\tau)| \leq \mathrm{Const.}\, M_f \tau^{-\mu^*} \exp[b\,|YX_0|]\,|YY_1|^{\theta h_1}$$

($|YX_0| \geq |Y_1 X_0|$) démontrées dans notre travail [5]: μ^* et h_1 sont définies par les formules (30), θ est un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité. Nous démontrerons le théorème suivant.

THÉORÈME 3. – Les mêmes hypothèses que dans le théorème 2 étant admises, les dérivées d'ordre M des intégrales de Poisson–Weierstrass (14) sont réguliérement continues par rapport au paramètre λ, notamment elles vérifient les inégalités

$$(62) \qquad |D_X^{(M)}[J_\alpha^{(\lambda)}(X,t)] - D_X^{(M)}[J_\alpha^{(\lambda')}(X,t)]|$$
$$\leq \mathrm{Const}\, M_f t^{-\mu} \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda}$$

où h_λ est un nombre positif arbitraire inférieur au nombre $h_1 = \min(h, Mh')$ et μ est un nombre arbitraire *supérieur* à l'unité; le coefficient positif *const* est indépendant des fonctions f_β, mais dépend du choix des constantes μ et h_λ.

Démonstration. – De même que précédemment nous étudierons les deux intégrales (48) et (49). La première admet les dérivées de tous les ordres présentées par les intégrales régulières, absolument convergentes,

$$(63) \qquad D_X^{(m)}[\overset{*}{J}{}^{(\lambda)}(X,t)] = \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} D_X^{(m)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Y,0}(X,t;Y,0)]\,f_\beta(Y)\,dY.$$

Donc, d'après l'inégalité (22) et (46), nous aurons

$$(64) \qquad |D_X^{(M)}[\overset{*}{J}{}^{(\lambda)}(X,t)] - D_X^{(M)}[\overset{*}{J}{}^{(\lambda')}(X,t)]|$$
$$\leq \mathrm{Const}\, M_f t^{-\mu} \exp[b\,|XX_0|]\,\omega_A(|\lambda - \lambda'|)$$

μ étant une constante arbitraire *supérieure à l'unité*. L'étude de la dérivée d'ordre M de l'intégrale (49) est plus difficile. Cette dérivée s'exprime par l'intégrale singulière

$$(65) \qquad D_X^{(M)}[\overset{**}{J}{}_\alpha^{(\lambda)}(X,t)] = \int_0^t \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} D_X^{(M)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Y,\tau}(X,t;Y,\tau)]\,\sigma_\beta^{(\lambda)}(Y,\tau)\,dY\,d\tau$$

qui n'est pas absolument convergente. C'est pourquoi nous utiliserons l'autre forme de la dérivée (65), donnée dans notre travail [4], (page 251). Nous écrirons donc

$$(66)\qquad D_X^{(M)}[\overset{**}{J}{}_\alpha^{(\lambda)}(X,t)] = \int_0^t F_\alpha^{(\lambda)}(X,t,\tau)\,d\tau$$

$$+\int_0^t \iiint_{E-K} \sum_{\beta=1}^{N} D_X^{(M)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Y,\tau}(X,t;Y,\tau)]\,\sigma_\beta^{(\lambda)}(Y,\tau)\,dY\,d\tau$$

où la fonction $F_\alpha^{(\lambda)}$ est une somme d'intégrales absolument convergentes suivantes

$$(67)\qquad F_\alpha^{(\lambda)}(X,t,\tau) =$$

$$\sum_{\beta=1}^{N}\sigma_\beta^{(\lambda)}(X,\tau)\left\{-\iint_{K'} D_X^{(M-1)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Z,\tau}(X,t;Q,\tau)]\cos\nu_j\,dQ\right\}_{Z=X}$$

$$+\sum_{\beta=1}^{N}\sigma_\beta^{(\lambda)}(X,\tau)\iiint_K\{D_X^{(M)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Y,\tau}(X,t;Y,\tau)]-((D_X^{(M)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Z,\tau}(X,t;Y,\tau)])_{Z=X}\}\,dY$$

$$+\iiint_K\sum_{\beta=1}^{N} D_X^{(M)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Y,\tau}(X,t;Y,\tau)]\,[\sigma_\beta^{(\lambda)}(Y,\tau)-\sigma_\beta^{(\lambda)}(X,\tau)]\,dY$$

où K est une sphère de rayon 2, centrée au point arbitraire $\bar{X}$ de l'espace E, X est un point arbitraire de K dont la distance du centre $\bar{X}$ est *inférieure à l'unité*. K' désigne la surface de la sphére K et ν_j – l'angle que fait la normale à la surface K' au point Q avec l'axe d'une telle variable x_j par rapport à laquelle on a différentié en passant de la dérivée $D_X^{(M-1)}$ à la derivée $D_X^{(M)}$.

L'étude du premier composant, $I_1^{(\lambda)}(X,t,\tau)$, de la somme (67) n'offre des difficultés, puisqu'il s'exprime par une intégrale régulière. On aura notamment, d'après les inégalités analogues à (22) et (52)

$$(68)\qquad |I_1^{(\lambda)}(X,t,\tau)-I_1^{(\lambda')}(X,t,\tau)| \leq \frac{\text{Const}\,M_f}{(t-\tau)^{\mu}\,\tau^{\tilde{\mu}}}[\omega_A(|\lambda-\lambda'|)]^{h_\lambda}$$

où $1-\frac{1}{M}<\mu'<1$; $\tilde{\mu}$ et h_λ sont définies par (38) et (39).

Pour obtenir une limitation de la différence des valeurs du second composant $I_2^{(\lambda)}(X,t,\tau)$, de la somme (67), étudions d'abord la fonction sous–intégrale

$$(69)\quad R^{(\lambda)}(X,t:Y,\tau)=D_X^{(M)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Y,\tau}(X,t;Y,\tau)]-(D_X^{(M)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Z,\tau}(X,t;Y,\tau)])_{Z=X}.$$

En vertu de l'inégalité analogue à (22) (voir [3], p. 170), nous aurons une limitation à singularités faibles

$$(70)\qquad |R^{(\lambda)}(X,t;Y,\tau)| \leq \frac{\text{Const}}{(t-\tau)^{\mu''}}|XY|^{n+M(1-\mu'')-h}$$

μ'' étant fixé dans l'intérvalle $1 - h/M < \mu'' < 1$. D'autre part on a une limitation de la différence

$$(71) \qquad |R^{(\lambda)}(X, t; Y, \tau) - R^{(\lambda')}(X, t; Y, \tau)| \leq \frac{\text{Const}}{(t-\tau)^{\mu'''}} \frac{\omega_A(|\lambda - \lambda'|)}{|XY|^{n+M(1-\mu''')}}$$

à singularité spatiale forte si $0 < \mu''' < 1$. En s'appuyant sur les inégalités (70) et (71), on conclut, par le même procédé que pour la différence (34), que la différence (71) vérifie l'inégalité

$$(72) \qquad |R^{(\lambda)}(X, t; Y, \tau) - R^{(\lambda')}(X, t; Y, \tau)| \leq \frac{\text{Const}\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h'_\lambda}}{(t-\tau)^{\mu_1}|XY|^{n+M(1-\mu_1)-h+h'_\lambda}}$$

aux singularités faibles, où

$$0 < h'_\lambda < h$$

$$(73) \qquad 1 - \frac{h - h'_\lambda}{M} < \mu_1 < 1 .$$

Les limitations (52) et (72) donnent pour le second composant de la somme (67) l'inégalité

$$(74) \qquad |I_2^{(\lambda)}(X, t, \tau) - I_2^{(\lambda')}(X, t, \tau)|$$

$$\leq \frac{\text{Const } M_f}{(t-\tau)^{\tilde{\mu}}\,\tau^{\tilde{\mu}}} \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda} .$$

L'étude du troisième composant de la somme (67) est tout à fait analogique et fournit une inégalité de la forme (68).

En rapprochant ces résultats, on aura pour la différence des valeurs de la fonction (67) l'inégalité suivante

$$(75) \qquad |F_\alpha^{(\lambda)}(X, t, \tau) - F_\alpha^{(\lambda')}(X, t, \tau)|$$

$$\leq \frac{\text{Const } M_f}{(t-\tau)^{\tilde{\mu}}\,\tau^{\tilde{\mu}}} \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda},$$

d'où résulte

$$(76) \qquad \left| \int_0^t [F^{(\lambda)}(X, t, \tau) - F^{(\lambda')}(X, t, \tau)]\, d\tau \right|$$

$$\leq \frac{\text{Const } M_f}{t^{2\tilde{\mu}-1}} \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda} .$$

L'étude du second composant, $I_{E-K}^{(\lambda)}(X, t)$, de la somme (66) est plus facile, l'intégrale étant régulière, en vertu de l'inégalité $|XY| > 1$ si $Y \in E - K$. En s'appuyant sur les inégalites déjà utilisées, nous obtiendrons

$$(77) \quad |I_{E-K}^{(\lambda)}(X, t) - I_{E-K}^{(\lambda')}(X, t)| \leq \text{Const}\, M_f\, t^{-\tilde{\mu}} \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda} .$$

En rapprochant les résultats obtenus (64), (76), (77), on arrive à la conclusion (62) du théorème 3.

§ 4. – Propriétés du potentiel de simple couche relativement au paramètre.

Soit dans l'espace E une surface S à $n-1$ dimensions, fermée où infinie (sans bord) ayant un plan tangent continu en tout point. Si $|S(X, R)|$ désigne l'aire de la portion de la surface S découpée par une sphère de rayon arbitraire R, centrée au point arbitraire X, on admet que

$$(78) \qquad |S(X, R)| < e^{cR}$$

c étant une constante positive, indépendant de X.

Le potentiel de simple couche (15), répandue sur la surface S, présente une régularité de la continuité par rapport au paramètre λ exprimée par le théorème suivant.

THÉORÈME 4. – Si les coefficients du système (1) vérifient les conditions (3), (4)', (5) dans la région (2), si la densité $\{\varphi_\beta(Q, \tau)\}$ de la couche, définie dans la région $[Q \in S ; 0 < \tau \leq T]$, vérifie les inégalités

$$(79) \qquad |\varphi_\beta(Q, \tau)| < M_\varphi \tau^{-\mu_\varphi} \exp[b\,|QX_0|]$$

$(0 \leq \mu_\varphi < 1 ; M_\varphi, b > 0)$ X_0 est un point fixé de la surface S, si en outre toute fonction $\varphi_\beta(Q, T)$ est intégrable en toute partie bornée et mesurable de la surface S, alors les composants (15) du potentiel de simple couche et leurs dérivées d'ordre $m < M-1$ vérifient dans la région $[X \in E, 0 < t \leq T]$ les inégalités suivantes

$$(80) \qquad |D_X^{(m)}[V_\alpha^{(\lambda)}(X, t)] - D_X^{(m)}[V_\alpha^{(\lambda')}(X, t)]|$$

$$\leq \text{Const}\, M_\varphi t^{1-\mu_m-\mu_\varphi} \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda-\lambda'|)]^{h_\lambda}$$

où les constantes μ_m et h_λ sont fixées arbitrairement dans les intervalles

$$(81) \qquad \frac{m+1}{M} < \mu_m < 1 \quad ; \quad 0 < h_\lambda < \min(h, Mh')$$

$(m = 0, 1, \cdots, M-2)$; le coefficient positif *const* ne dépend pas des fonctions φ_β, mais dépend du choix des constantes μ_m et h_λ.

Démonstration. – En s'appuyant sur les inégalités (22), (40) et (42), on constate sans peine que les éléments (8) de la matrice des solutions du système (1) et leurs dérivées d'ordre $m < M-1$ vérifient les inégalités

$$(82) \qquad |D_X^{(m)}[\Gamma_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X, t ; Y, \tau)] - D_X^{(m)}[\Gamma_{\alpha\beta}^{(\lambda')}(X, t ; Y, \tau)]|$$

$$\leq \frac{\text{Const}}{(t-\tau)^{\mu''_m}} \frac{\exp[-k\,|XY|]}{|XY|^{n+m-M\mu''_m}} [\omega_A(|\lambda-\lambda'|)]^{h_\lambda}$$

ou μ''_m est fixé arbitrairement dans l'intervalle

$$(82') \qquad \frac{m+1}{M} < \mu''_m < \min\left(1, \frac{m+n}{M}\right)$$

pour qu'on ait
$$n + m - M\mu''_m < n - 1 .$$
Nous en concluons que les différences de composants du potentiel de simple couche (15) et leurs dérivées d'ordre $m < M - 1$ s'expriment par les intégrales absolument convergentes

$$(83) \qquad D_X^{(m)}[V_\alpha^{(\lambda)}(X,t)] - D_X^{(m)}[V_\alpha^{(\lambda')}(X,t)] =$$
$$\int_0^t \iint_S \sum_{\beta=1}^N D_X^{(m)}[\Gamma_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X,t;Q,\tau) - \Gamma_{\alpha\beta}^{(\lambda')}(X,t;Q,\tau)]\,\varphi_\beta(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$

$(m = 0, 1, \cdots, M-2)$ en tout point $X \in E$ (même sur la surface S) pour $0 < t \leq T$.

Il en résulte, en vertu de la limitation (82), l'inégalité suivante

$$(84) \qquad | D_X^{(m)}[V_\alpha^{(\lambda)}(X,t)] - D_X^{(m)}[V_\alpha^{(\lambda')}(X,t)] |$$
$$\leq \text{Const}\, M_\varphi [\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu''_m}\tau^{\mu_\varphi}} \iint_S \frac{\exp[b\,|QX_0| - k\,|XQ|]\,dQ}{|XQ|^{n+m-M\mu''_m}}$$
$$\leq \text{Const}\, M_\varphi \exp[b\,|XX_0|]\, t^{1-\mu''_m-\mu_\varphi} [\omega_A(|\lambda-\lambda'|)]^{h_\lambda} \iint_S \frac{\exp[-(k-b)\,|XQ|]}{|XQ|^{n+m-M\mu''_m}}\,dQ .$$

Or, en fixant la constante $k > b + c$, on constate sans peine (voir l'hypothèse (78)) que la dernière intégrale est bornée si $X \in E$, nous arrivons donc à la conclusion (80) du théorème 4.

THÉORÈME 5. – Les mêmes hypothèses étant admises que dans le théorème 4 et la surface S vérifiant les conditions de Liapounoff, les dérivées d'ordre $M-1$ des composants (15) du potentiel de simple couche vérifient les inégalités

$$(85) \qquad | D_X^{(M-1)}[V_\alpha^{(\lambda)}(X,t)] - D_X^{(M-1)}[V_\alpha^{(\lambda')}(X,t)] |$$
$$\leq \text{Const}\, \frac{M_\varphi t^{1-\mu-\mu_\varphi}}{|XP_X|^{M(1-\mu)}} \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda-\lambda'|)]^{h_\lambda}$$

en tout point $X \in E - S$; P_X désigne un point de la surface S le plus approché du point X, μ est un nombre fixé arbitrairement dans l'intervalle

$$(85') \qquad 1 - \frac{1}{M} < \mu < 1 .$$

Démonstration. – Nous appuierons de même sur l'inégalité (82), en posant $m = M - 1$ et en remplaçant le nombre μ''_m par un nombre μ fixé arbitrairement dans l'intervalle (85').

Supposons d'abord que $|XP_X| \geq R_0$ ou R_0 est un nombre positif fixé, nous aurons alors

$$(86) \qquad | D_X^{(M-1)}[V_\alpha^{(\lambda)}(X,t) - D_X^{(M-1)}[V_\alpha^{(\lambda')}(X,t)] |$$
$$\leq \text{Const}\, \frac{M_\varphi t^{1-\mu-\mu_\varphi}}{|XP_X|^{M(1-\mu)}} e^{b\,|XX_0|} [\omega_A(|\lambda-\lambda'|)]^{h_\lambda} \iint_S \frac{\exp[-(k-b)\,|XQ|]}{|XQ|^{n-1}}\,dQ$$

la dernière intégrale étant bornée si $|XP_X| \geq R_0$ et $k > b + c$.

Dans le cas $|XP_X| < R_0$ écrivons

$$
(87) \qquad | D_X^{(M-1)} [V_\alpha^{(\lambda)}(X, t)] - D_X^{(M-1)} [V_\alpha^{(\lambda')}(X, t)] |
$$

$$
\leq \text{Const } M_\varphi t^{1-\mu-\mu_\varphi} e^{b|XX_0|} [\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda} \iint_S \frac{\exp[-(k-b)|XQ|]}{|XQ|^{n+M(1-\mu)-1}} dQ
$$

et décomposons la dernière intégrale en somme

$$
I(X) = I^{(s)}(X) + I^{(S-s)}(X)
$$

d'intégrales étendues: 1) à une portion s de la surface S dont la projection orthogonale sur le plan tangent en P_X est une sphère à $n-1$ dimensions, centrée en P_X et de rayon $2 R_0$ suffisamment petit pour que les conditions de Liupounoff soient applicables, 2) à la partie restante $S - s$. Nous aurons alors

$$
(88) \qquad | I^{(s)}(X) | < \int_0^{R_0} \frac{\omega_{n-2}\, c r^{n-2}\, dr}{[r^2 + |XP_X|^2]^{\frac{n+M(1-\mu)-1}{2}} \chi^{n+M(1-\mu)-1}}
$$

$$
< \frac{c\omega_{n-2}}{\chi^{n+M(1-\mu)-1}} \frac{1}{|XP_X|^{M(1-\mu)}} \int_0^{R_0/|XP_X|} \frac{\rho^{n-2}\, d\rho}{(1+\rho^2)^{[n+M(1-\mu)-1]/2}}
$$

où c désigne la borne supérieure de l'inverse du cosinus de l'angle entre la normale au point $Q \in s$ et la normale au point P_X, χ est une constante positive figurant dans les inégalités connues

$$
(89) \qquad 0 < \chi \leq \frac{|XQ|}{|XQ'|} \leq \frac{1}{\chi}
$$

Q' étant la projection du point $Q \in s$ sur le plan tangent au point P_X à la surface S. L'intégrale figurant dans le membre droit de l'inégalité (88) est évidemment bornée si $|XP_X| \to 0$, en outre il est évident que l'intégrale étendue à la portion $S - s$ est bornée pour $|XP_X| < R_0$, nous en concluons la thèse (85) du théorème 5.

Travaux cites.

[1] J. PETROVSKY, *Ueber das Cauchysche Problem für ein System linearer partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen*, « Bull. Univ. Moscou », fasc. 7 (1938).

[2] S. EIDELMANN, *Sur les solutions fondamentales des systèmes paraboliques* (en russe), « Matem. Sbornik », t. 38 (1956).

[3] W. POGORZELSKI, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, « Ricerche di Matem. », Napoli, t. 7 (1958).

[4] W. POGORZELSKI, *Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, « Mathem. Scand. » (1959).

[5] W. POGORZELSKI, *Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique*, « Ann. École Norm. Sup. », LXXVI, Paris (1959).