Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giulio Krall

Sulla stabilità dell'equilibrio di barre in profilato sottile. - Nota II. Caso dello sforzo assiale - flessione - torsione di Eulero-Prandtl-Greenhill

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **33** (1962), n.1-2, p. 13–21.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_33_1-2_13_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Meccanica. — *Sulla stabilità dell'equilibrio di barre in profilato sottile.* – Nota II. *Caso dello sforzo assiale – flessione – torsione di Eulero–Prandtl–Greenhill.* Nota (*) del Socio GIULIO KRALL.

4. IL CASO DELLO SFORZO ASSIALE ECCENTRICO. – Siano costanti tutti i coefficienti elastici di forma ed in particolare sia $k_u^{(t)} = k_w^{(s)} = 0$. È $M_t = 0$ ed i momenti M_x, M_z sono conseguenti ad eccentricità e_x, e_z dello sforzo assiale costante N sicché, con riguardo alle convenzioni di segno evidenti in fig. 2 della Nota I,

$$M_2 = Ne_x \quad , \quad M_1 = -Ne_z \, .$$

Le (19) divengono allora, poiché è inutile l'introduzione del parametro λ di cui gli uffici passano ad N,

$$(20) \quad \begin{cases} B_1 u^{(IV)} + Nu'' + k_u u + \underline{B_1 \tilde{z}_0 \varphi^{(IV)}} + N(z_0 - e_z)\varphi'' + k_u z_0 \varphi = 0 \\ B_2 w^{(IV)} + Nw'' + k_w w - \underline{B_2 \tilde{x}_0 \varphi^{(IV)}} - N(x_0 - e_x)\varphi'' - k_w x_0 \varphi = 0 \\ (C_1 + \underline{\tilde{z}_0^2} B_1 + \underline{\tilde{x}_0^2} B_2)\varphi^{(IV)} - [C - N(e_z \beta_1 + e_x \beta_2 + r_0^2)]\varphi'' + \\ \quad + (k_u z_0^2 + k_w x_0^2)\varphi + (\underline{\tilde{z}_0 B_1 u^{(IV)}} - \underline{\tilde{x}_0 B_2 w^{(IV)}}) + N[(z_0 - e_z)u'' - \\ \quad (x_0 - e_x)w''] + k_u z_0 u - k_w x_0 w = 0 . \end{cases}$$

Per $\tilde{x}_0 = \tilde{z}_0 = 0$ cioè per $x_0 = x_c$, $z_0 = z_c$ si hanno evidentemente le equazioni della teoria ordinaria dei profili sottili.

Con le posizioni soddisfacenti alle condizioni agli estremi, fissi ma a snodo e quindi $u = w = 0$; $u'' = w'' = 0$, $\varphi = 0$, $\varphi'' = 0$; A_1, A_2, A_3 essendo costanti a priori incognite,

$$u = A_1 \sin\frac{m\pi}{l}y \quad , \quad w = A_2 \sin\frac{m\pi}{l}y \quad , \quad \varphi = A_3 \sin\frac{m\pi}{l}y, \quad (m = 1, 2, \cdots,)$$

si ottiene l'equazione (21) di compatibilità nel parametro N.

Questa equazione algebrica di 3° grado in N parla da sé: esistono tre carichi di Eulero–Prandtl per assegnate eccentricità e_x, e_z in corrispondenza ad ogni intero m. Va considerato per ogni carico quel valore di m che lo rende minimo. Se $k_u = 0$, $k_w = 0$, questo valore è $m = 1$. In particolare esistano piani di simmetria e sia:

$$1) \quad x_0 = 0 \, , \, z_0 \neq 0 \, , \, e_x = 0 \, , \, e_z \neq 0 \quad ; \quad \tilde{x}_0 = 0 \, , \, \tilde{z}_0 \neq 0,$$

rispettivamente

$$2) \quad x_0 \neq 0 \, , \, z_0 = 0 \, , \, e_x \neq 0 \, , \, e_z = 0 \quad ; \quad \tilde{x}_0 \neq 0 \, , \, \tilde{z}_0 = 0 .$$

Allora, considerati i carichi di Eulero per $m = 1$ e di svergolamento virtuale in assenza di ogni accoppiamento

(*) Presentata nella seduta del 10 febbraio 1962.

$$
(21)\qquad \left|\begin{array}{ccc}
B_1\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 - N\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + k_u \,, & 0 \,, & \begin{array}{l}\underline{B_1\,\tilde{z}_0\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4} - N(z_0 - e_z)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \\ + k_u z_0\end{array} \\[2ex]
0 \,, & B_2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 - N\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + k_w \,, & \begin{array}{l}-\underline{B_2\,\tilde{x}_0\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4} + N(x_0 - e_x)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - \\ - k_w x_0\end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l}\underline{\tilde{z}_0 B_1\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4} - N(z_0 - e_z)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \\ + k_u z_0\end{array} \,, & \begin{array}{l}-\underline{\tilde{x}_0 B_2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4} + N(x_0 - e_x)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - \\ - k_w x_0\end{array} \,, & \begin{array}{l}[C_1 + \underline{B_1\,\tilde{z}_0^2} + \underline{B_2\,\tilde{x}_0^2}]\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 + \\ + [C - N(e_z\beta_1 + e_x\beta_2 + r_0^2)]\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + \\ + k_u z_0^2 + k_w x_0^2\end{array}
\end{array}\right| = 0.
$$

$$(22) \qquad \tilde{N}_1 = \frac{\pi^2}{l^2} B_1 \quad , \quad \tilde{N}_2 = \frac{\pi^2}{l^2} B_2 \quad , \quad \tilde{N}_3 = \frac{C + (C_1 + \underline{B_1 \tilde{\tilde{z}}_0^2} + \underline{B_2 \tilde{\tilde{x}}_0^2}) \dfrac{\pi^2}{l^2}}{r_0^2} \, .$$

Con r_0^2 dato alla (15) e $C_1 = EC_w$, posto ancora

$$\rho^2 = e_z \beta_1 + e_x \beta_2$$

si hanno le equazioni da cui calcolare i tre carichi critici N_1, N_2, N_3 nei due casi specificati, con il rilievo che per $\tilde{N}_3$ e r_0^2 vanno adoperate le espressioni (15) e (22) per $\tilde{\tilde{x}}_0 = 0$, $x_0 = 0$ rispettivamente per $\tilde{\tilde{z}}_0 = 0$, $z_0 = 0$,

$$\begin{vmatrix} \tilde{N}_1 - N & 0 & \underline{\tilde{N}_1 \tilde{\tilde{z}}_0} - N(z_0 - e_z) \\ 0 & \tilde{N}_2 - N & 0 \\ \underline{\tilde{N}_1 \tilde{\tilde{z}}_0} - N(z_0 - e_z) & 0 & \tilde{N}_3 r_0^2 - N(r_0^2 + \rho^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$(23) \qquad \text{con } \rho^2 = e_z \beta_1 \ , \ x_c = 0 \ , \ x_0 = 0 ;$$

$$\begin{vmatrix} \tilde{N}_1 - N & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_2 - N & -[\underline{\tilde{N}_2 \tilde{\tilde{x}}_0} - N(x_0 - e_x)] \\ 0 & -[\underline{\tilde{N}_2 \tilde{\tilde{x}}_0} - N(x_0 - e_x)] & \tilde{N}_3 r_0^2 - N(r_0^2 + \rho^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{con } \rho^2 = e_x \beta_2 \ , \ z_c = 0 \ , \ z_0 = 0 .$$

Da qui le equazioni più espressive, di cui è ben ovvia la discussione,

$$(23\,a) \qquad (\tilde{N}_2 - N) \{ [\underline{\tilde{N}_1 \tilde{\tilde{z}}_0} - N(z_0 - e_z)]^2 - (\tilde{N}_1 - N) [\tilde{N}_3 r_0^2 - N(r_0^2 + \rho^2)] \} = 0 ;$$

$$(23\,b) \qquad (\tilde{N}_1 - N) \{ [\underline{\tilde{N}_2 \tilde{\tilde{x}}_0} - N(x_0 - e_x)]^2 - (\tilde{N}_2 - N) [\tilde{N}_3 r_0^2 - N(r_0^2 + \rho^2)] \} = 0 .$$

Per $z_0 = z_c = e_z$ rispettivamente $x_0 = x_c = e_x$ si ritrovano i carichi critici della teoria ordinaria

$$N_1 = \tilde{N}_1 \, , \, N_2 = \tilde{N}_2 \, , \, N_3 = \frac{\tilde{N}_3}{1 + \dfrac{e_z \beta_1}{r_0^2}}$$

rispettivamente

$$N_1 = \tilde{N}_1 \, , \, N_2 = \tilde{N}_2 \, , \, N_3 = \frac{\tilde{N}_3}{1 + \dfrac{e_x \beta_2}{r_0^2}} \, .$$

5. IL CASO DI EULERO. SFORZO ASSIALE N APPLICATO NEL BARICENTRO. RAFFRONTO CON LE FORMOLE DI R. KAPPUS [3]. – Con le notazioni (22) che scriviamo in forma leggermente variata, introducendo una espressione ridotta $\tilde{N}_3^*$ di $\tilde{N}_3$,

$$(22\,a) \qquad \tilde{N}_1 = \frac{\pi^2}{l^2} B_1 \quad , \quad \tilde{N}_2 = \frac{\pi^2}{l^2} B_2 \quad , \quad \tilde{N}_3^* = \frac{C + C_1 \left(\dfrac{\pi}{l}\right)^2}{r_0^2}$$

essendo, al solito,

$$r_0^2 = x_0^2 + z_0^2 + i_p^2 \quad , \quad i_p^2 = \frac{J_x + J_z}{A} = \frac{J_2 + J_1}{A} ,$$

si ha l'equazione in N

$$(23\,c) \quad \begin{vmatrix} \tilde{N}_1 - N & 0 & \underline{\tilde{N}_1 \tilde{z}_0} - N z_0 \\ 0 & \tilde{N}_2 - N & -(\underline{\tilde{N}_2 \tilde{x}_0} - N x_0) \\ \underline{\tilde{N}_1 \tilde{z}_0} - N z_0 & -(\underline{\tilde{N}_2 \tilde{x}_0} - N x_0) & \underline{\tilde{N}_1 \tilde{z}_0^2 + \tilde{N}_2 \tilde{x}_0^2} + (\tilde{N}_3^* - N) r_0^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Per il caso della simmetria rispetto ad un asse, poniamo l'asse x, è $z_c = 0$ e la (23 c), per $z_0 = 0$, si riduce a

$$(23\,c)' \qquad \tilde{N}_1 - N = 0 , \quad \begin{vmatrix} \tilde{N}_2 - N & -(\tilde{N}_2 \tilde{x}_0 - N x_0) \\ -(\underline{\tilde{N}_2 \tilde{x}_0} - N x_0) & \tilde{N}_2 x_0^2 + (\tilde{N}_3^* - N) r_0^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Per $\tilde{x}_0 = 0$ cioè per $x_c = x_0$ si ha secondo la teoria ordinaria

$$(\tilde{N}_2 - N)(\tilde{N}_3^* - N) - N^2 \frac{x_c^2}{r_0^2} = 0 ,$$

e da qui un $N_2 < \tilde{N}_2$, $N_3 > \tilde{N}_3^*$.

Qui rileviamo che secondo Kappus [3], in luogo della (23 c), prendendo norma da una rotazione attorno a G baricentro della sezione, è

$$(23\,c)_K \qquad \tilde{N}_1 - N = 0 , \quad \begin{vmatrix} \tilde{N}_2 - N & E R_x \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \\ E R_x \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 & G J_T + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E C_K - N i_p^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

In questa equazione $G J_T$ è la nostra C; C_K (l'indice K sta qui per evitare ambiguità, ma in [3] sta scritto C) ed R_x sono dati da

$$C_K = \int w^2 dF + \frac{1}{F}\left(\int w\, dF\right)^2 \quad , \quad R_x = \int z w\, dF$$

w essendo la cosidetta *Einheitsverwölbung* calcolabile secondo (9) di [3].

Per il caso del profilo a C, cfr. fig. 5, a), Kappus trova

$$C_K = \frac{s a^2 b^3}{12} \frac{2 + 15\beta + 26\beta^2}{(1 + 2\beta)^2} \quad , \quad R_x = -\frac{s a^2 b^2}{3} \frac{1 + 3\beta}{1 + 2\beta} .$$

Ora, nel caso nostro, con riguardo a detto profilo a) della fig. 5, si ha, designando *come in* [3], s lo spessore (δ), a l'altezza (h) dell'anima, b la larghezza dell'ala, $\beta = b/a$,

$$e_C = b \cdot \frac{3\beta}{1 + 6\beta} \quad , \quad e_G = b \cdot \frac{\beta}{1 + 2\beta} \quad , \quad -x_c = e_C + e_G = b \cdot \frac{4\beta(1 + 3\beta)}{(1 + 2\beta)(1 + 6\beta)} ,$$

$$J_x = \frac{s a^3}{12}(1 + 6\beta) \quad , \quad \frac{1}{E} \cdot \tilde{N}_2 x_c = J_x x_c \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = -\frac{s a^2 b^2}{3} \frac{1 + 3\beta}{1 + 2\beta} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$$

$$C_1 = E C_w \quad , \quad C_w = \frac{s a^2 b^3}{12} \frac{2 + 3\beta}{1 + 6\beta} \quad . \quad J_x x_c^2 = \frac{s a^2 b^3}{12} \left(\frac{1 + 3\beta}{1 + 2\beta}\right)^2 \frac{16\beta}{1 + 6\beta} .$$

Per completezza, con riguardo ai profili *b*) e *c*) della fig. 5, si ha, con $\beta = b/a$, per e_G, e_C, x_c e per la *warping constant* C_w

$$b) \qquad e_G = e_C = \frac{a}{2} \quad , \quad x_c = 0 \quad , \quad C_w = \frac{sb^3 a^2}{12} \cdot \frac{2+\beta}{1+2\beta}$$

e, con $\beta_1 = b_1/a$, $\beta_2 = b_2/a$ solo e soltanto per le *c*) che seguono,

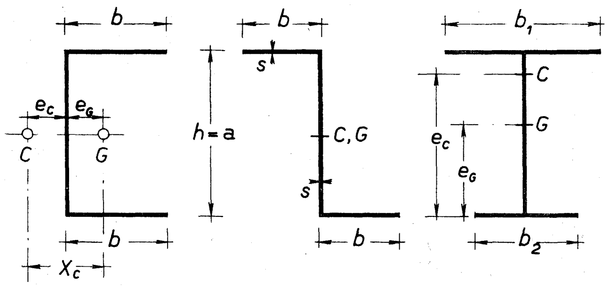
$$c) \qquad e_G = \frac{a}{2}\,\frac{1+2\beta_1}{1+\beta_1+\beta_2} \quad , \quad e_C = a\frac{\beta_1^3}{\beta_1^3+\beta_2^3} \quad , \quad C_w = \frac{sa^5}{12}\cdot\frac{\beta_1^3\beta_2^3}{\beta_1^3+\beta_2^3}\,.$$

Si constata agevolmente da quanto sopra che risulta

$$ER_x = EJ_x x_c \quad , \quad C_K = C_w + J_x x_c^2$$

Pertanto la $(23\,c)_K$ di Kappus si scrive

$$(23\,c)'_K \qquad \begin{vmatrix} \tilde{N}_2 - N & \underline{\tilde{N}_2 x_c} \\ \underline{\tilde{N}_2 x_c} & \tilde{N}_3^* r_0^2 + \tilde{N}_2 x_c^2 - N i_p^2 \end{vmatrix} = 0\,.$$



a) b) c)

Fig. 5.

Per la rotazione attorno al baricentro G, si ha dalla ns. $(23\,c)'$, ponendo $x_0 = 0$ e quindi $\tilde{x}_0 = -x_c$,

$$(23\,c)''_K \qquad \begin{vmatrix} \tilde{N}_2 - N & \underline{\tilde{N}_2 x_c} \\ \underline{\tilde{N}_2 x_c} & \tilde{N}_3^* r_0^2 + \tilde{N}_2 x_c^2 - N i_p^2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

cioè la $(23\,c)'_K$ c.d.d.

6. INSTABILITÀ AL MOMENTO TORCENTE. – Consideriamo la circostanza particolarmente semplice in cui è

$$M_x = M_z = 0 \quad , \quad N = 0 \quad , \quad M_t \neq 0.$$

Siano nulli tutti i *k*. È il caso dell'asta soggetta a sola torsione.

Le (19) si riducono, inutile essendo in tal caso il moltiplicatore λ, a

$$(24) \qquad \begin{cases} B_1 u^{IV} + M_t (w''' - x_0 \varphi''') + \underline{B_1 \tilde{z}_0} \varphi^{IV} = 0\,, \\ B_2 w^{IV} - M_t (u''' + z_0 \varphi''') - \underline{B_2 \tilde{x}_0} \varphi^{IV} = 0\,, \\ \underline{(B_1 \tilde{z}_0^2 + B_2 \tilde{x}_0^2 + C_1)} \varphi^{IV} - C\varphi'' + \underline{\tilde{z}_0 B_1} u^{IV} - \underline{\tilde{x}_0 B_2} w^{IV} + M_t(\tilde{x}_0 u''' + \tilde{z}_0 w''') - \\ - M_t (x_0 \tilde{z}_0 - z_0 \tilde{x}_0)\, \varphi''' = 0. \end{cases}$$

Le condizioni agli estremi sieno, con riguardo alle (19 a), $u = w = 0$, $B_1 u_C^{*''} + M_t w_C^{*'} = 0$, $w' = 0$ con che, per $\tilde{x}_0 = 0$, $B_1 u'' = 0$; infine, $\varphi = 0$, $\varphi'' = 0$. Si hanno dunque estremi fissi con incastro rispetto a w, snodo rispetto ad u.

Ammettiamo dunque che sia $\tilde{x}_0 = x_0 = 0$, $\tilde{z}_0 \neq 0$. Alle (24), con le considerate condizioni agli estremi, si soddisfa allora ponendo

$$(25)\qquad u = A_1 \sin \frac{2\pi}{l} y \quad , \quad w = A_2 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{l} y \right) \quad , \quad \varphi = A_3 \sin \frac{2\pi}{l} y$$

con A_1, A_2, A_3 costanti a priori incognite.

Risulta, con tale posizione, un sistema di tre equazioni algebriche lineari omogenee nelle A_1, A_2, A_3 di cui l'equazione di compatibilità si scrive, ponendo compendiosamente

$$(26)\qquad \Gamma = \underline{(C_1 + B_1 \tilde{z}_0^2)} \left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 + C$$

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} 4\tilde{N}_1 & -M_t \frac{2\pi}{l} & \underline{B_1 \tilde{z}_0 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2} \\ M_t \frac{2\pi}{l} & -4\tilde{N}_2 & M_t z_0 \frac{2\pi}{l} \\ \underline{B_1 \tilde{z}_0 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2} & -M_t \tilde{z}_0 \frac{2\pi}{l} & \Gamma \end{vmatrix} = 0 .$$

Da questa, se ha fattore di M_t nella 2ª riga di (27) ci fosse $\tilde{z}_0$ in luogo di z_0 o se la $\sim$ mancasse dappertutto, (cfr. osservazione dopo le (18), (18 a)), si avrebbe con qualche trasformazione,

$$(28)\qquad M_{t,cr} = \frac{2\pi}{l} \cdot \sqrt{B_1 B_2}$$

rispettivamente, togliendo la $\sim$ nei termini con M_t, e per $\tilde{z}_0 = 0$, cioè $z_0 = z_c$ nei termimi con B_1, B_2,

$$(29)\qquad M_{t,cr} = \frac{2\pi}{l} \cdot \sqrt{\frac{B_1 B_2}{1 + \left(\frac{2\pi z_c}{l}\right)^2 \frac{B_1}{\Gamma}}}$$

Si rileva dalla (28) il fatto, sulle prime non immediato, già noto secondo Greenhill, che alla stabilità al momento torcente non concorre la torsiorigidezza. La formola di Greenhill per un profilo, per cui $B_1 = B_2$, snodato agli estremi, si scrive in rigore

$$(30)\qquad M_{t,cr} = \frac{2\pi}{l} B$$

ed a questa riconduce anche la (28) che è *riferita però all'incastro* (rispetto a w). Sicché, attraverso l'impostazione qui considerata, che vorrebbe costituire un ulteriore perfezionamento della teoria dei profili sottili, per il caso del solo momento torcente M_t e nelle condizioni considerate, si trova semplicemente l'$M_{t,cr}$ di Greenhill valido per i profili in cui il centro del taglio si può ignorare. Togliendo invece la $\sim$ nei termini con M_t si ottiene, per $z_0 = z_e$, un $M_{t,cr}$ secondo la (29) ridotto rispetto al valore dato dalla (28) e dalla (30) di Greenhill in particolare.

7. CASO LIMITE IN CUI NON SI CONSIDERA x_c, z_c COME NEI PROFILI ORDINARI. – Merita scrivere completo il sistema in u, w, φ per il caso di N_0, M_1, M_2, M_t concomitanti. Si ha dalle (19),

$$(19') \qquad \begin{cases} B_1 u^{(IV)} + \lambda M_t w''' + \lambda N_0 u'' + \lambda M_1 \varphi'' = 0 \\ B_2 w^{(IV)} - \lambda M_t u''' + \lambda N_0 w'' + \lambda M_2 \varphi'' = 0 \\ C_1 \varphi^{(IV)} - (C - \lambda N_0 r_0^2) \varphi'' + \lambda M_1 u'' + \lambda M_2 w'' = 0; \end{cases}$$

con r_0^2 secondo le (15) per $x_0 = z_0 = 0$,

$$r_0^2 = \frac{J_x + J_z}{A} = i_x^2 + i_z^2 = i_p^2.$$

Le condizioni ai limiti divengono

$$(19a') \quad \begin{cases} [B_1 u'' + \lambda M_t w' + \lambda M_1 \varphi]\, \delta u' - [B_1 u''' + \lambda (N_0 u' + M_1 \varphi' + M_t w'')]\, \delta u = 0 \\ [B_2 w'' - \lambda M_t u' + \lambda M_2 \varphi]\, \delta w' - [B_2 w''' + \lambda (N_0 w' + M_2 \varphi' - M_t u'')]\, \delta w = 0 \\ C_1 \varphi''\, \delta\varphi' + \{(C - \lambda N_0 r_0^2) \varphi' - C_1 \varphi''' - \lambda (M_1 u' + M_2 w')\}\, \delta\varphi = 0. \end{cases}$$

Secondo la fig. 6 la verifica diretta di queste (19 a') riesce senza difficoltà.

Sia $M_1 = M_2 = 0$ e in $x = 0, l$; $u = w = 0$. Le (19)' si riportano allora al 2° ordine; si ha precisamente

$$(19'') \qquad \begin{cases} B_1 u'' + \lambda N_0 u + \lambda M_t w' = 0 \\ B_2 w'' + \lambda N_0 w - \lambda M_t u' = 0. \end{cases}$$

Tali equazioni (19″) sono nel caso specifico, ($M_1 = M_2 = 0$), equivalenti alle (19′) in quanto si verifica che per $u = w = 0$ agli estremi risultano soddisfatte automaticamente le (19 a').

Se $B_1 = B_2 = B$, posto $\lambda = 1$, le (19″) si identificano con le note equazioni di Greenhill. Per queste si ha in rigore, con un artificio che non riesce però per $B_1 \neq B_2$, la condizione di stabilità

$$(31) \qquad \sqrt{4\, B N_0 + M_t^2} \leq \sigma B \qquad \left(\sigma = \frac{2\pi}{l}\right).$$

Da questa, introducendo la nozione di moltiplicatore λ dei carichi, quindi dl N_0 ed M_t, si ha l'equazione quadratica in λ

$$(32) \qquad M_t^2 \lambda^2 + 4\, B N_0 \lambda - \sigma^2 B^2 = 0.$$

La radice inferiore dà il λ_{cr}. Si constata subito che uno sforzo di trazione ($N_0 < 0$) aumenta il λ_{cr} rispetto alla torsione.

Lasciando aperta la ricerca del λ_{cr} per le (19′), con le (19 a') si dànno qui soltanto alcune soluzioni particolari.

Si considerino le condizioni $u = w = 0$, $\varphi = 0$, $u' = 0$, $w'' = 0$, $\varphi' = 0$ in $x = 0, l$ corrispondenti allo snodo rispetto a w, all'incastro rispetto ad

u e φ agli estremi. Queste condizioni sono conformi alle (19 a'), come si constata direttamente.

Si hanno allora, per $M_2 = 0$; A_1, A_2, A_3 designando fattori a priori incogniti, le soluzioni

$$(33) \qquad u = A_1 (1 - \cos \sigma y) \;,\; w = A_2 \sin \sigma y \;,\; \varphi = A_3 (1 - \cos \sigma y) \;; \quad \left(\sigma = \frac{2\pi}{l}\right).$$

Entrando con queste nelle (19'), risulta un sistema lineare omogeneo in A_1, A_2, A_3 di cui la condizione di compatibilità si scrive, convenendo di porre

$$(34) \qquad \Gamma^* (\lambda) = C_1 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 + C - \lambda N_0 r_0^2 \,,$$

$$(35) \qquad \begin{vmatrix} B_1 \sigma^2 - \lambda N_0 & \lambda M_t \sigma & -\lambda M_1 \\ \lambda M_t \sigma & B_2 \sigma^2 - \lambda N_0 & 0 \\ -\lambda M_1 & 0 & \Gamma^* (\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

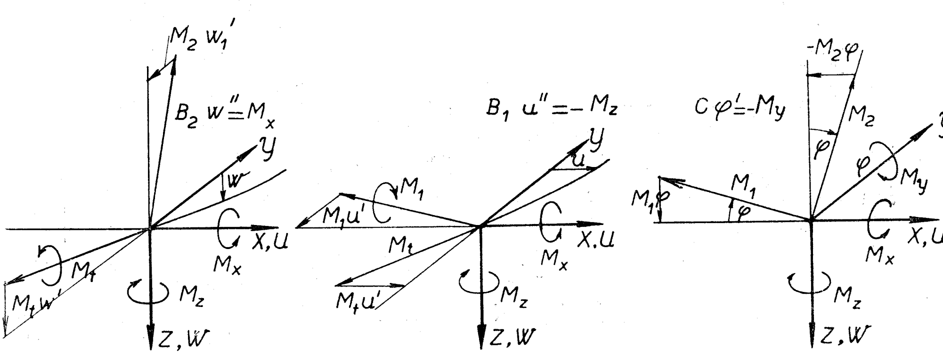


Fig. 6.

Da qui si hanno le relazioni, di controllo per la loro evidenza:

a) $M_t = 0$, N_0 fisso, $N_0 r_0^2 \ll \mathcal{C}$, $\mathcal{C} = C_1 \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 + C$

$$(35\,a) \qquad M_{1,cr} = \lambda_{cr} M_1 \cong \sqrt{(B_1 \sigma^2 - N_0)\, \mathcal{C}} \;;$$

b) $M_1 = 0$, N_0 fisso,

$$(35\,b) \qquad M_{t,cr} = \lambda_{cr} M_t \sim \frac{1}{\sigma} \sqrt{(B_1 \sigma^2 - N_0)(B_2 \sigma^2 - N_0)} \;;$$

c) per $N_0 = 0$, $M_1 = 0$

$$(35\,c) \qquad M_{t,cr} = \lambda_{cr} M_t = \frac{2\pi}{l} \sqrt{B_1 B_2}$$

che è eguale alla (28).

8. Caso delle σ_{cr} oltre il campo elastico. – Con riguardo ai profili sottili ed a quelli ordinari, va rilevato che, se per una distribuzione di sforzi N_0 e momenti M_1, M_2, M_t si ha una sollecitazione principale mas-

sima σ_0 in una zona sensibile della struttura e $\lambda_{cr}^{(0)}$ è il moltiplicatore critico di tale distribuzione, sarà $\sigma_{cr}^{(0)} = \lambda_{cr}^{(0)}\,\sigma_0$ la massima σ principale nella condizione critica di instabilità. Se risulta $\sigma_{cr}^{(0)} \geq \sigma_p$ limite di proporzionalità (più o meno coincidente con il limite di elasticità) il λ_{cr}, che si indicherà con $\lambda_{cr}^{(0)}$, diventa illusorio. Ma si può sempre calcolare da questo un λ_{cr} da intendersi come limite inferiore dell'effettivo. Si ha precisamente [5],

$$\lambda_{cr} = \lambda_{cr}^{(0)} \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{cr}^{(0)}} \tag{36}$$

con

$$\sigma_{cr} = \alpha - \pi\beta \cdot \sqrt{\frac{E_0}{\sigma_{cr}^{(0)}}} \tag{36 a}$$

α e β essendo le costanti delle formole di Tetmayer; ad esempio, per l'acciaio di qualità, Aq. 50,

$$\alpha = 5891 \text{ Kg cm}^{-2} \quad , \quad \beta = 38{,}18 \text{ Kg cm}^{-2} \quad , \quad E_0 = 2{,}1 \cdot 10^6 \text{ Kg cm}^{-2}.$$

Per le applicazioni cfr. i complementi di una breve Nota successiva.