
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIORGIO FERRARESE

Sulla stabilità dell'equilibrio di un arco in profilato sottile: premesse e generalità. Nota I

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 32 (1962), n.6, p.
931–935.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_931_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sulla stabilità dell'equilibrio di un arco in profilato sottile: premesse e generalità.* Nota I di GIORGIO FERRARESE, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

Sono note e sempre utili due formole notevoli del Timoshenko per la stabilità di un arco circolare soggetto a pressione radiale uniforme q_0 e ad eventuale momento flettente M applicato agli estremi come si indica in fig. 1.

Per quanto concerne la pressione uniforme q_0 , una delle formole considera la stabilità per flessione per spostamenti radiali w senza estensione, nel proprio piano Π , l'altra la deviazione laterale per spostamenti u e torsione φ fuori dal piano.

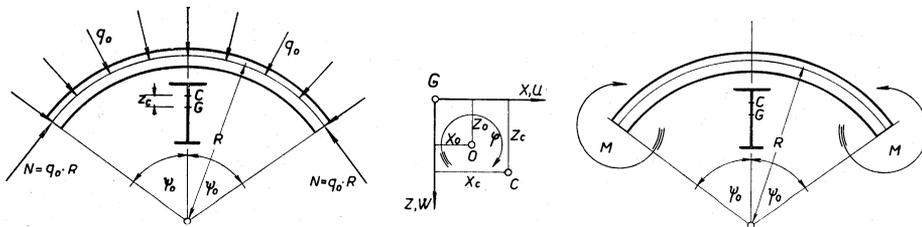


Fig. 1.

Per il momento M si ha invece instabilità solo per flessione fuori da Π . Brevemente, se $2\psi_0$ è l'apertura dell'arco, B_2 e B_1 rispettivamente le flessorigidità per flessione in Π e fuori da Π , C la torsiorigidità, le formole di Timoshenko si possono compendiare in una sola introducendo la nozione di moltiplicatore λ dei carichi q_0 ed M . Si ha precisamente, per quel più piccolo $\lambda = \lambda_{cr}$ che rende critica la distribuzione data, l'equazione

$$(1) \left[\frac{B_2}{R^2} (K^2 - 1) - \lambda N \right] \begin{vmatrix} \frac{1}{R^2} (B_1 K^2 + C) - \lambda \left(N + \frac{M}{R} \right) & \frac{B_1 + C}{R} - \lambda M \\ K^2 \left(\frac{B_1 + C}{R} - \lambda M \right) & K^2 C + B_1 - \lambda R M \end{vmatrix} = 0$$

essendo $N = Rq_0$, $K = \frac{\pi}{2\psi_0}$.

Si vede bene naturalmente che la flessione instabile in Π per q_0 è indipendente da u e φ .

Nella presente Nota mi propongo di estendere questa formola generale al caso in cui la sezione resistente dell'arco sia sottile, cioè tale per cui occorre tener conto della nozione di *centro del taglio* C che nella (1) non interviene. Per il caso delle aste elastiche in profilato sottile, si sa, è svilup-

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1962.

pata tutta una teoria cui è legato soprattutto il nome del Timoshenko⁽¹⁾. In questi stessi « Rendiconti », anzi in questo stesso fascicolo⁽²⁾, il problema è riagitato:

1° per esprimere, per queste strutture, il criterio energetico di stabilità secondo Dirichlet, si vuol dire la condizione

$$(2) \quad \delta\Phi = 0 \quad , \quad \Phi = W + \lambda(\Omega_2^* - \Omega_2),$$

essendo W , Ω_2^* , Ω_2 funzionali di significato noto in appresso specificati. Il criterio suddetto ha, in generale, una portata maggiore di qualunque altro, particolarmente per quanto riguarda lo studio della stabilità degli archi; studio che non riesce per la via energetica ordinaria se non a prezzo di ipotesi particolari (suggerite dalla nozione, a priori acquisita, di una almeno delle equazioni alle variazioni in u , w , φ desunte non dal principio variazionale ma direttamente) sulle funzioni concorrenti al minimo;

2° per apportare una variante di impostazione che si riflette sui risultati finali. Più precisamente si ammette che la rotazione della generica sezione resistente avvenga attorno ad un punto $O \equiv (x_0, z_0)$ a priori *non* coincidente col centro del taglio C . Naturalmente, indicate con u , w le componenti, secondo gli assi x , z centrali d'inerzia della sezione resistente, dello spostamento di O , per il generico punto della sezione è ancora

$$(3) \quad u_* = u + (z_0 - z)\varphi \quad , \quad w_* = w - (x_0 - x)\varphi;$$

in particolare per il baricentro G , origine degli assi, scrivendo brevemente u_G , w_G per u_G^* , w_G^* di⁽²⁾, poiché non c'è ormai pericolo di ambiguità,

$$(3 a) \quad u_G = u + z_0\varphi \quad , \quad w_G = w - x_0\varphi.$$

Ma se, in accordo con la definizione di centro del taglio, la flessione è valutata rispetto all'asse dei centri $C \equiv (x_c, z_c)$ i momenti flettenti M_x , M_z rispetto agli assi centrali, almeno nel caso dell'asta a direttrice rettilinea, vanno espressi dalle relazioni

$$M_x = B_2 w_C'' \quad , \quad M_z = -B_1 u_C''$$

essendo [cfr. (3)]

$$(3 b) \quad u_C = u + \tilde{z}_0\varphi \quad , \quad w_C = w - \tilde{x}_0\varphi,$$

$$(4) \quad \tilde{x}_0 = x_0 - x_c \quad , \quad \tilde{z}_0 = z_0 - z_c.$$

Richiamandomi per brevità alla Nota citata passo senz'altro a precisare, specificandoli, i funzionali W , Ω_2^* , Ω_2 che intervengono nella (2). Esplicitato Φ si possono ricavare, con l'algoritmo usuale, le euleriane del principio variazionale $\delta\Phi = 0$ e da queste è poi facile risalire, almeno nei casi più semplici, ai moltiplicatori λ (autovalori) per cui si hanno soluzioni u , w , φ non nulle, necessariamente instabili. Naturalmente, per la pratica, il λ_{cr} è il più piccolo tra gli autovalori sopra indicati e costituisce la misura della sicurezza (all'instabilità).

(1) Cfr. S. TIMOSHENKO, *Théorie de la flexion, torsion et flambage des barres à parois minces et à section ouverte*, « Ossature Metallique », nn. 7, 8, 9 (1947) e *Theory of elastic stability*, Chap. V, 2ª ed. New-York, London (1961).

(2) Cfr. G. KRALL, *Sulla stabilità dell'equilibrio di barre in profilato sottile*, Note I e II.

Non occorre dire che le formole cui perverrò debbono, per O coincidente con G o in condizioni per cui siano trascurabili le conseguenze della non coincidenza, ricadere nelle (1). Osservo ancora che, per quanto riguarda il divario di impostazione, anche qui accettato, riguardante la scelta di un centro di rotazione O non necessariamente coincidente con C, ho dappertutto sottolineato i termini che ne derivano sicché, per chi voglia seguire la via ordinaria, non ha che ometterli, ove lo creda; ciò che del resto non era neppure necessario in quanto, per $O \rightarrow C$, tali termini si annullano automaticamente.

2. ENERGIA ELASTICA E LAVORO DI 2° ORDINE. — Dopo le premesse fatte prendo in esame piccoli spostamenti di un arco in profilato sottile a partire da una configurazione di equilibrio (forzato) \mathcal{C}_0 sotto l'azione di un carico radiale $q_0 = \text{cost}$, supponendo che in questa:

a) la direttrice sia piana;

b) le tensioni interne (attive) si riducano ad uno sforzo assiale N di compressione e ad un momento flettente M di asse ortogonale al piano dell'arco, entrambi costanti;

c) l'arco sia cernierato agli estremi in modo tale che siano impediti rotazioni delle due basi attorno alle rispettive normali.

Secondo il criterio già invocato, l'analisi della stabilità di \mathcal{C}_0 si riconduce allo studio della variazione prima del funzionale

$$\Phi = W + \lambda(\mathcal{L}_2^* - \mathcal{L}_2)$$

atto a rappresentare l'energia totale dell'arco in una configurazione ottenuta da \mathcal{C}_0 mediante un arbitrario spostamento virtuale.

Attualmente si intende ⁽³⁾

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} W = \frac{1}{2} \int_0^l \left[B_1 \kappa_u^2 + B_2 \kappa_w^2 + C \kappa_\varphi^2 + D e_\psi^2 + C_1 \left(\frac{d^2 \varphi}{ds^2} \right)^2 \right] ds \\ \mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2} \int_0^l q_0 \left[c(v^2 + w^2) + \frac{dw}{ds} v - w \frac{dv}{ds} \right] ds, \end{array} \right.$$

con l'avvertenza di sostituire nella (5)₁ ad u e w rispettivamente, u_C e w_C dati dalla (3 b) e nella (5)₂ w con $w_G = w - x_0 \varphi$. Naturalmente κ_u , κ_w e κ_φ hanno il significato ben noto e le espressioni $\left(c = \frac{1}{R} \right)$ ⁽⁴⁾

$$(5 a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \kappa_u = c\varphi - u'' \\ \kappa_w = w'' + c'v + c^2w \\ \kappa_\varphi = \varphi' + cu', \end{array} \right.$$

l'apice indicando la derivazione rispetto all'ascissa curvilinea s .

(3) Cfr. G. KRALL, *Stabilità trasversale degli archi da ponte*, in corso di stampa nelle «Mem. fis. Acc. Lincei», pp. 31 e sgg., in particolare le formole (14 a), (14 b) e (33).

(4) Cfr. ad esempio la Memoria sopra citata, formole (6 a), (7) e (8).

Per quanto riguarda il lavoro di 2° ordine Ω_2^* degli sforzi interni si ha:
per lo sforzo assiale N

$$\Omega_2^* = - \int_0^l ds \int_A \frac{N}{A} e^{(2)} dA = - \frac{1}{2} \int_0^l ds \int_A \frac{N}{A} [u_*'^2 + (w_*' + cv)^2] dA$$

ovvero [cfr. (3)]

$$(5 \ b) \quad \Omega_2^* = - \frac{1}{2} N \int_0^l [u'^2 + 2 z_0 u' \varphi' + (w' + cv)^2 - 2 x_0 (w' + cv) \varphi' + r_0^2 \varphi'^2] ds ;$$

per la flessione M

$$(5 \ c) \quad \Omega_2^* = \frac{1}{2} \int_0^l [M \beta_1 \varphi'^2 - M (\kappa_u \varphi + \kappa_\varphi u')] ds ,$$

avendo adottato le usuali notazioni del Timoshenko

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \frac{1}{J_x} \int_A z (x^2 + z^2) dA - 2 z_0 \\ r_0^2 = i_\rho^2 + x_0^2 + z_0^2, i_\rho^2 = \frac{J_x + J_z}{A} \end{array} \right.$$

Si noti che la (5 c) è un'ovvia generalizzazione della analoga espressione per una barra, data dalla (16) della Nota citata in ⁽²⁾.

3. EULERIANE DEL PRINCIPIO VARIAZIONALE $\delta\Phi = 0$. - Coi precedenti richiami si ha ormai quanto basta per scrivere Φ per disteso ed applicare tranquillamente l'algoritmo variazionale. Per semplicità mi limito a riportare le sole equazioni relative al caso $c = \text{cost} = 1/R$ (arco circolare). Si hanno allora le seguenti equazioni:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta u/ \quad B_1 \left(u'' + \frac{\varphi}{R} \right)'' - \frac{C}{R} \left[\varphi'' + \frac{1}{R} (u + \frac{\varphi}{R})'' \right] + \lambda \left[N (u'' + z_0 \varphi'') + M \varphi'' \right. \\ \quad \left. + \frac{M}{R} u'' \right] = 0 \\ \delta v/ \quad \lambda \left(q_0 - \frac{N}{R} \right) \left(w' - x_0 \varphi' + \frac{v}{R} \right) - D e_\psi = 0 \\ \delta w/ \quad B_2 \left[w'' - \frac{\varphi}{R} \right]'' + \frac{1}{R^2} (w - \frac{\varphi}{R})'' + \frac{B_2}{R^2} \left[w'' - \frac{\varphi}{R} \right]'' + \frac{1}{R^2} (w - \frac{\varphi}{R}) + \\ \quad + \lambda \left[N \left(w'' - x_0 \varphi'' + \frac{v'}{R} \right) + q_0 \left(\frac{w}{R} - \frac{x_0}{R} \varphi - v \right) \right] - \frac{D}{R} e_\psi = 0 \\ \delta \varphi/ \quad \frac{\tilde{z}_0 B_1 \left[(u + \frac{\varphi}{R})'' - \frac{\varphi}{R} \right]'' - \tilde{x}_0 B_2 \left[(w - \frac{\varphi}{R})'' + \frac{1}{R^2} (w - \frac{\varphi}{R}) \right]'' +}{\frac{\tilde{x}_0}{R^2} B_2 \left[(w - \frac{\varphi}{R})'' + \frac{1}{R^2} (w - \frac{\varphi}{R}) \right] - \frac{\tilde{z}_0}{R} C \left[\varphi'' + \frac{1}{R} (u + \frac{\varphi}{R})'' \right] +} \\ \quad + C_1 \varphi'' - C \left[\varphi'' + \frac{1}{R} (u + \frac{\varphi}{R})'' \right] - \lambda \left[(M \beta_1 - N r_0^2) \varphi'' + \frac{M}{R} \varphi \right] + \\ \quad + \lambda N \left(z_0 u'' - x_0 w'' - \frac{v'}{R} x_0 \right) + \lambda q_0 x_0 \left[v' - \frac{1}{R} (w - x_0 \varphi) \right] + \frac{D}{R} \tilde{x}_0 e_\psi + \\ \quad + \frac{B_1}{R} \left[\frac{\varphi}{R} - (u + \frac{\varphi}{R})'' \right] + \lambda M u'' = 0 . \end{array} \right.$$

In una prossima Nota procederò a qualche esemplificazione e controllo del sistema ora scritto. Si noti tuttavia sin da ora che le equazioni ottenute coincidono, per $R \rightarrow \infty$, $D = 0$, $q_0 = 0$, con quelle relative al caso rettilineo ⁽⁵⁾; per $\beta_1 = 0$, $r_0 = 0$, $x_0 = z_0 = 0$, $\tilde{x}_0 = \tilde{z}_0 = 0$, si ritrovano poi le equazioni della teoria ordinaria ⁽⁶⁾.

Osservazione. — Date le sostituzioni fatte nella (5) il sistema (7) può utilmente semplificarsi. Prescindendo infatti da una combinazione lineare delle prime tre equazioni, la (7)₄ può essere sostituita con l'altra

$$(8) \quad C_1 \varphi^{IV} + \frac{B_1}{R} \left[\frac{\varphi}{R} - (u + \tilde{z}_0 \varphi)'' \right] - C \left[\varphi'' + \frac{1}{R} (u + \tilde{z}_0 \varphi)'' \right] + \\ - \lambda M \left[\frac{\varphi}{R} + \beta \varphi'' - \left(1 - \frac{\tilde{z}_0}{R} \right) u'' \right] + \lambda N \left[\rho \varphi'' + (z_0 - \tilde{z}_0) u'' - (x_0 - \tilde{x}_0) \left(w'' + \frac{v'}{R} \right) \right] + \\ + \lambda q_0 (x_0 - \tilde{x}_0) \left[v' - \frac{1}{R} (w - x_0 \varphi) \right] = 0$$

ove si è posto [cfr. (4)]

$$(9) \quad \beta = \beta_1 + \tilde{z}_0, \quad \rho = r_0^2 - \underline{x_0 \tilde{x}_0 - z_0 \tilde{z}_0} = i_p^2 + x_0 x_c + z_0 z_c.$$

(5) Cfr. la Nota citata in ⁽²⁾, formola (19) per $M_1 = M$, $M_2 = 0$, $M_t = 0$, $k_u = k_u^{(f)} = 0$, $k_w = k_w^{(s)} = 0$.

(6) Cfr. la Memoria citata in nota ⁽³⁾, p. 43, formole (40)_{1,2} e (41) per $\varepsilon = 0$, $h = 0$, $k_u^{(s)} = k_u^{(f)} = k_u^{(t)} = 0$.