Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Corrado Böhm

Macchine a indirizzi, dotate di un numero minimo di istruzioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 923–930.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_923_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Teoria delle calcolatrici. — *Macchine a indirizzi, dotate di un numero minimo di istruzioni* (*). Nota di CORRADO BÖHM, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

La presente Nota si propone di colmare una lacuna oggi percepibile fra la nozione di calcolatrice a programma e quella di macchina di Turing [1] (1). Mentre quest'ultimo concetto è stato approfondito da vari autori (vedi Bibliografia di [3]) non ci risulta esistere una nozione di macchina consona al modo di operare di molte calcolatrici attuali. La ragione va ricercata nella grande complicazione organizzativa degli elaboratori. Van der Poel [2], mosso inizialmente da preoccupazioni costruttive, ha fatto qualche proposta sul modo di ridurre tale complicazione. Il presente lavoro prende lo spunto da quei suggerimenti per costruire una adeguata teoria delle cosidette macchine a indirizzi, che differiscono dalle calcolatrici attualmente costruite solo nell'ammettere che non vi sia limite superiore alla quantità di informazione racchiudibile in una cella di memoria. Il teorema 1 mostra che per qualsiasi funzione ricorsiva in una variabile si può scrivere, per una data macchina S_2, dotata di 2 istruzioni, un programma che ne permetta il calcolo automatico (per qualsiasi valore dell'argomento).

Il teorema 2 dimostra la medesima tesi per una macchina S_1 dotata di una sola istruzione, ed infine il teorema 3 generalizza i precedenti risultati per una qualsiasi funzione ricorsiva in più variabili.

1. – MACCHINA A INDIRIZZI, DOTATA DI DUE ISTRUZIONI.

Sia R^* l'insieme $\{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots \varepsilon\}$ e sia $I \subset R^*$ l'insieme dei numeri naturali e $R = R^* - \{\varepsilon\}$ quello degli interi relativi. La funzione $x - y$ abbia il significato abituale se $x, y \in R$ e valgano inoltre le definizioni

$$\varepsilon - x = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } x > 0 \quad \text{o} \quad x = \varepsilon \end{cases} \tag{1}$$

$$x - \varepsilon = \begin{cases} \varepsilon & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \tag{2}$$

grazie alle quali $x - y$ risulta totalmente definita anche in R^* (2). Sia ora M l'insieme $\{0, 1, 2, \cdots, m-1, m, \varepsilon\}$ (dove $m \geq 0$) che chiameremo anche insieme di *celle indirizzate*. Associamo ad ogni $i \in M$ una funzione $\gamma_i(x, y)$ con argomenti in I e valori in R^*, e diremo che γ_i è il *contenuto* della cella di indi-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 22 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno Acc. 1961–62.

(**) Nella seduta del 12 giugno 1962.

(1) Vedi «Bibliografia» alla fine della Nota.

(2) Osserviamo che restano valide in R^* le identità $0 - (0 - x) \equiv x$, $x - x \equiv 0$, $x - 0 \equiv x$, mentre ad esempio $x - (0 - y) \not\equiv y - (0 - x)$. Eviteremo perciò in seguito la notazione $x + y$.

rizzo i, o più brevemente *contenuto dell'indirizzo* i. L'insieme delle $m + 2$ funzioni γ_i sia parzialmente definito dal seguente schema ricorrente S_2:

$$\gamma_0(x, 0) = x, \gamma_i(x, 0) = p_i \; (i \neq 0), \; p_\varepsilon = 1 \tag{3}$$

(dove le componenti p_i del vettore $P = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ saranno chiamate *istruzioni* e sono arbitrari elementi di R^*, mentre il vettore P sarà chiamato *programma*).

Valgano ora simultaneamente le ipotesi (4), (5), (6):

$$p_i(x, y) \quad \textit{definite} \tag{4}$$

e, posti

$$\gamma_\varepsilon(x, y) = \alpha \quad , \quad \gamma_\alpha(x, y) - (0 - \alpha) = \delta$$

$$\alpha \in M \tag{5}$$

$$\delta \in M. \tag{6}$$

Allora le $\gamma_i(x, y + 1)$ sono definite dalle (7) (8) (9):

$$\gamma_0(x, y + 1) = \gamma_\delta(x, y + 1) = \gamma_\delta(x, y) - \gamma_0(x, y) \tag{7}$$

valendo inoltre nel caso in cui $\delta \neq \varepsilon$

$$\gamma_\varepsilon(x, y + 1) = \gamma_\varepsilon(x, y) - (-1) \tag{8}$$

ed in ogni caso per $l \neq 0, \varepsilon, \delta$

$$\gamma_l(x, y + 1) = \gamma_l(x, y). \tag{9}$$

Se le ipotesi (4) (5) (6) non sussistono simultaneamente allora nessuna delle $\gamma_i(x, y + 1)$ è definita.

Ciò premesso ci proponiamo di dimostrare il seguente

TEOREMA 1. – *Per ogni funzione ricorsiva in una variabile $f(x)$ esistono un insieme M_f ed un corrispondente vettore P_f (vuoto se $m = 0$) tali che, definendo mediante essi e mediante lo schema S_2 le funzioni $\gamma_i(x, y)$ valga*

$$f(x) = \gamma_0(x, \mu t\{\psi(x, t)\}) \tag{10}$$

dove si è posto

$$\psi(x, t) = \gamma_\varepsilon(x, t) \,\overline{\in}\, M_f \tag{11}$$

e dove $\mu t \{\cdots\}$ si legge: il minimo $t \geq 0$ tale che $\cdots$.

Le funzioni ricorsive (in più variabili) formano come è noto (Tesi di Church, vedi Kleene [4]) la più generale famiglia delle funzioni di cui si possa dare una definizione costruttiva. L'interesse del teorema risiede sopratutto nel significato che esso assume se lo schema S_2 viene interpretato come la definizione di una macchina calcolatrice astratta cui daremo il nome di *macchina a indirizzi* con due tipi di *istruzioni elementari* o più brevemente *macchina a indirizzi dotata di due istruzioni* (3). Per facilitare questa interpretazione di-

(3) Adoperando il comune linguaggio di programmazione la prima istruzione è la *sottrazione cumulata da un trasferimento*, mentre la seconda è un *salto incondizionato* (caso i cui $\delta = \varepsilon$).

remo che alla cella di indirizzo zero corrisponde un *registro accumulatore* ed alla cella di indirizzo ε un *registro* di *controllo* o *governo*. Se interpretiamo la variabile y come variabile temporale allora il vettore $\gamma_i(x, y)$ di $m+2$ componenti può essere interpretato come la configurazione della macchina all'istante y; il vettore $\gamma_i(x, 0)$ diventa allora la configurazione iniziale, mentre una configurazione $\gamma_i(x, \bar{y})$ per cui non è definita una successiva diventa una configurazione finale (la macchina è ferma). Il funzionamento della macchina consiste nel passaggio da una configurazione alla successiva.

Il Teorema 1 assume il seguente significato:

Per ogni funzione ricorsiva $f(x)$ esiste un programma P_f per la macchina a indirizzi S_2 tale che se l'accumulatore contiene x inizialmente, nella configurazione finale esso contiene $f(x)$. La macchina si ferma la prima volta che il registro di controllo contiene un indirizzo non esistente. In breve: *Se la funzione $f(x)$ è calcolabile esiste un programma per calcolarla mediante la macchina* S_2; cioè *la* S_2 *è universale* (se ci si limita a funzioni ad una variabile). In realtà la macchina S_2 è universale senza restrizioni, come sarà mostrato più avanti (Teorema 3).

La dimostrazione del teorema 1 si semplifica se si utilizza come definizione di funzione ricorsiva un risultato di J. Robinson [5] che riportiamo qui di seguito: ogni funzione ricorsiva in una variabile può essere ottenuta a partire da due funzioni base $\mathbf{I}$ e K applicando ripetutamente una fra le formule

$$F(x) = A(x) + B(x)\,,\ F(x) = B(A(x))\,,\ F(x) = \mu t\{B(t) = x\} \equiv B^{-1}(x)$$

allo scopo di costruire una nuova funzione da funzioni già ottenute A e B.

La terza formula è usata solo se B assume tutti i valori. Le funzioni $\mathbf{I}$ e K sono così definite.

$$\mathbf{I}(x) = 1 \quad , \quad K(x) = x - T(\mu t\{T(t) - x > 0\} - 1)$$

dove

$$T(z) = \frac{1}{2} z(z+1)\,.$$

In altre parole il teorema 1 è dimostrato se si possono fornire due vettori $P_{\mathbf{I}}$ e P_K ed inoltre, ammessa l'esistenza dei vettori P_A e P_B si può mostrare come si costruiscono a partire da essi i vettori P_{A+B}, $P_{B(A)}$ $P_{B^{-1}}$ corrispondenti alla *somma*, *composizione* delle due funzioni e alla *inversione* di una di esse.

Premettiamo alla dimostrazione il seguente

LEMMA I. – *Se il teorema 1 è valido, se* $\gamma_\varepsilon(x, \bar{y}) = m + 1$ *e se* $p_\varepsilon = 1 + h$ *con* $h \geq 0$ *allora la sostituzione di* $i - (0 - h)$ *al posto di* i *per* $i \neq 0$ *lascia inalterata la validità del teorema.* In altre parole: *Nelle ipotesi accennate i programm per la* S_2 *sono invarianti per traslazione.* Infatti zero ed ε restano inalterati, α viene sostituito da $\alpha' = \alpha - (0 - h)$. Per verificare che anche δ viene sostituito da $\delta + (0 - h)$ basta notare l'identità in R^*

$$u - (0 - (\alpha - (0 - h))) \geq \equiv (u - (0 - \alpha)) - (0 - h) \qquad (h \geq 0)$$

da utilizzare per $u = \gamma_{\alpha'}(x, y)$.

In conseguenza di quanto precede le (5) (6) rimangono soddisfatte dopo la sostituzione se lo erano prima ed i valori di γ_0, γ_ε, γ_l definiti dalle (7) (8) (9), rimangono inalterati: infine l'ipotesi $\gamma_\varepsilon(x, \bar{y}) = m + 1$ garantisce che $\bar{y}$ rimanga inalterato. Il lemma è perciò dimostrato.

Nel seguito ogni vettore sarà indicato giustapponendo le sue istruzioni nel dovuto ordine. Il vettore $P_F\ P_G$ è il vettore che si ottiene concatendando le istruzioni di P_F con quelle di P_G. Per evitare confusioni ogni istruzione sarà preceduta dal suo segno ($+$ o $-$) e per ragioni di uniformità scriveremo -0 al posto di 0 e $+0$ al posto di ε. Il numero di istruzioni di P_A, P_B, $\cdots$, sarà indicato con m_A, m_B, $\cdots$.

I numeri o lettere scritte al disotto delle istruzioni sono da ignorare fino a nuovo avviso. I seguenti risultati forniscono la dimostrazione del teorema 1.

$$(12)\qquad P_1 \equiv \underset{0}{-1}\ \underset{0}{+3}\ \underset{0}{+2}\ \underset{-1}{-3}\ \underset{1}{-0}$$

$$(13)\qquad P_K \equiv \underset{\substack{-x\\ t}}{-0}\ \underset{e(x,t)}{-0}\ -2\ \underset{0}{-3}\ \underset{-2}{-2}\ \underset{\alpha+2}{+0}\ +14\ +3\ \underset{0}{+2}\ \underset{e(x,t)}{-8}\ \underset{-e(x,t)}{-0}\ -0\ \underset{0}{-1}\ \underset{-1}{-1}$$
$$\underset{t+1}{-14}\ \underset{e(x,t+1)}{-14}\ \underset{-e}{-0}\ \underset{\varepsilon-e}{+4}\ -2\ \underset{0}{-3}\ \underset{14}{-14}\ \underset{\substack{\alpha-14\\ -14}}{+0}\ -21\ \underset{0}{-22}\ \underset{\varepsilon}{-19}\ \underset{\varepsilon}{-4}$$
$$-26\ \underset{0}{-27}\ +3\ \underset{0}{+2}\ \underset{-e(x,\bar{t})}{-20}\ \underset{e(x,\bar{t})}{-0}$$

$$(14)\qquad P_{B(A)} \equiv \underset{A(x)}{P_A}\ \ \underset{B(A(x))}{P_B}$$

$$(15)\qquad P_{A+B} \equiv \underset{-x}{-0}\ \ \underset{x}{-0}\ \ P_A\ \ (3+m_B)\ \ \underset{0}{(2+m_B)}\ \ \underset{x}{(-3-m_A)}\ \ \underset{B(x)}{P_B}\ \ \underset{-B(x)}{-0}$$
$$(-6\,m_A-m_B)\ \ \underset{0}{(-7-m_A-m_B)}\ \ (-7-m_A-m_B)\ \ \underset{0}{(-8-m_A-m_B)}$$
$$-4\ \ \underset{0}{+3}\ \ \underset{A(x)}{(-11-m_B)}\ \ \underset{-B(x)-A(x)}{-8}\ \ \underset{A(x)+B(x)}{-0}$$

$$(16)\qquad P_{B-1} \equiv \underset{-x}{-0}\ \ (26+m_B)\ \ \underset{0}{(25+m_B)}\ \ \underset{-2}{(32+m_B)}\ \ \underset{\alpha+2}{+0}\ \ (17+m_B)\ \ -0$$
$$\underset{0}{-1}\ \underset{-1}{-1}\ \underset{y+1}{(25+m_B)}\ \ \underset{B(y+1)}{P_B}\ \ \underset{-B(y+1)}{-0}\ \ -0\ \underset{0}{-1}\ \underset{-x}{(-13-m_B)}\ \ \underset{x-B(y+1)}{-4}\ \ -0$$
$$\underset{0}{-1}\ \ \underset{\varepsilon}{(-13-m_B)}\ \ \underset{-B(y+1)-\varepsilon}{-8}\ \ \underset{\varepsilon-(-B-\varepsilon)}{+4}\ \ -10\ \ \underset{0}{-11}\ \ \underset{17+m_B}{(-17-m_B)}$$
$$\underset{\substack{\alpha-17-m_B\\ -17-m_B}}{+0}\ \ (-24-m_B)\ \ \underset{0}{(-25-m_B)}\ \ \underset{t}{+8}\ \underset{t}{-0}\ \ +6\ \ \underset{0}{+5}\ \ \underset{\varepsilon}{(-26-m_B)}$$
$$\underset{\varepsilon}{-8}\ \ +2\ \ \underset{0}{+1}\ \ \underset{0}{-1}\ \ \underset{1}{-2}\ \ \underset{1}{-2}\ \ \underset{1}{+3}\ \ \underset{0}{+2}\ \ \underset{-\bar{t}}{-12}\ \ \underset{-\bar{t}}{-0}.$$

Commento alle formule precedenti.

Al disotto di p_i non è scritto niente se non esiste u tale che $\gamma(x, u) = i$ oppure se tale u esiste ma il valore $y_0(x, u+1)$ non interessa. Se al disotto di p è scritto *un* numero (o formula) esso rappresenta il valore di $\gamma_0(x, u+1)$ dove u soddisfa $\gamma_\varepsilon(x, u) = i$. Se al disotto di p_i sono scritti *due* numeri (o formule), in colonna, il primo di essi ha il medesimo significato di cui sopra, mentre il secondo ha quello di $\gamma_0(x, u' + 1)$ dove $u' > u$.

Formula (12). – Si verifica facilmente che in questo caso $\gamma_\varepsilon(x, y) = 1 + y$; $\bar{y} = 5$, $0 \leq \delta(x, y) \leq 5$ per $y < 5$ e $\gamma_5(x, 4) = p_5$; si ha poi $\delta(x, 4) = 5$, $\gamma_5(x, 5) = \gamma_0(x, 5) = 0 - \gamma_0(x, 4) = 0 - (-1) = 1$ c. d. d.

Formula (13). – Si osservi che

$$\gamma_\varepsilon(x, y) = 1 + y \quad \text{per} \quad y \leq 4, \ \gamma_\varepsilon(x, 5) = 5 \quad , \quad \delta(x, 5) = \varepsilon$$

mentre $\gamma_\varepsilon(x, 6) = 5 - \gamma_0(x, 5) = 5 - (-2) = 7$. In generale ogni volta sia $\delta(x, u) = \varepsilon$ è da aspettarsi un *salto* nella successione dei valori di $\gamma_\varepsilon(x, y)$.

Ciò si esprime dicendo che ε è un istruzione di salto.

La funzione $e(x, 0) = x$, $e(x, t+1) = e(x, t) - (t+1)$ viene costruita per valori successivi di t fino al valore $\bar{t} = \mu t\{e(x, t+1) < 0\}$. È facile vedere dalla definizione di K che risulta $e(x, \bar{t}) = K(x)$. Per la comprensione della (13) è essenziale notare che $\gamma_{22}(x, u) = \varepsilon$ finché $t < \bar{t}$ mentre diventa $\gamma_{22}(x, u) = 0$ nel caso $t = \bar{t}$.

In altre parole la γ_{22} è un'istruzione *di salto condizionato* da $t < \bar{t}$. L'esecuzione del salto causa la ripetizione delle istruzioni $\gamma_8 \div \gamma_{22}$ che provvedono in sostanza all'incremento di 1 di t ed alla verifica che $0 - e(x, t+1) > 0$. Nella configurazione finale è ancora $\gamma_{22}(x, \bar{y}) = \varepsilon$.

Formula (14). – La validità della formula è una diretta conseguenza del Lemma I.

Formula (15). – Nessuna difficoltà offre la verifica della validità di questa formula. L'inserzione dei programmi P_A e P_B è lecita come conseguenza del Lemma I.

Formula (16). – L'inserzione di P_B all'interno di una successione di istruzioni $\gamma_7 \div \gamma_{24+m_B}$ che vengono ripetute $\bar{t}+1$ volte $(\bar{t} \geq 0)$ ha influenzato la costruzione dei programmi delle formule (12) $\div$ (16) nel senso della *iterabilità*. Un programma P_f che soddisfa il teorema 1 si dice iterabile se indicando con P'_f il vettore $\gamma_1(x, \bar{y})\ y_2(x, \bar{y}) \cdots y_{m_f}(x, \bar{y})$ anche il programma P' soddisfa il teorema 1. Ora è facile controllare che P_I, P_K sono iterabili e che se P_A, P_B sono iterabili P_{A+B}, $P_{B(A)}$, P_{B-1} pure lo sono.

La proprietà di *iterabilità* non è la sola trasmettibile dai programmi delle formule (12) $\div$ (16) ad ogni programma costruibile da esse.

Altre proprietà, essenziali per la presente dimostrazione del teorema 1 sono le seguenti:

I) Nei programmi delle formule (12) $\div$ (16) il verificarsi della condizione (5) implica il verificarsi della (6).

II) Nei medesimi programmi $\gamma_\varepsilon(x, \bar{y}) = m + 1$ (questa proprietà è indispensabile per l'applicabilità del Lemma I).

III) Nei medesimi programmi $\gamma_m(x, \bar{y}) = \gamma_0(x, \bar{y})$ e se $\bar{y} > 0$ $\gamma_\varepsilon(x, \bar{y} - 1) = m$.

(Questa proprietà di normalizzazione ha semplificato la costruzione di P_{A+B} : vedi specialmente l'effetto dell'istruzione $p_{13+m_A+m_B}$).

2. – Macchina a indirizzi, dotata di una istruzione.

Introduciamo ora uno schema ricorrente o macchina S_1, in certo senso più semplice della S_2. L'insieme delle celle indirizzate sia l'insieme $M^{(n)} \equiv \{-n, -n+1, \cdots -1, 0, 1 \cdots m, \varepsilon\}$, $m \geq 0$, $n \geq 1$. Le $n+m+2$ funzioni $\gamma_i(x, z)$ (i contenuti delle celle) siano parzialmente definite dallo schema S_1 seguente:

(17) $\qquad \gamma_0(x, 0) = x \;,\; \gamma_i(x, 0) = p_i \,(i \neq 0)\, p_{-n} = 0 \;,\; p_\varepsilon = 1.$

Valgano ora simultaneamente le ipotesi

(18) $\qquad \gamma_i(x, z)$ *definite*

e, posti

$\beta = z - (n-1) \cdot ([z/(n-1)] - 1)$ dove $[a/b]$ è la parte intera di a/b

$\eta = \gamma_\beta(x, z)$

(19) $\qquad \gamma_\varepsilon(x, (n-1) \cdot [z/(n-1)]) \in M^{(n)}$

(20) $\qquad \eta \in M^{(n)}.$

Allora le $\gamma_i(x, z+1)$ sono definite dalle

(21) $\qquad \gamma_{-n}(x, z+1) = \gamma_\eta(x, z+1) = \gamma_\eta(x, z) - \gamma_{-n}(x, z)$

(22) $\qquad \gamma_l(x, z+1) = \gamma_l(x, z) \qquad l \neq -n, \eta.$

Se le (18) (19) (20) non valgono simultaneamente nessuna delle $\gamma_i(x, z+1)$ è definita.

Vale ora il seguente:

Teorema 2. – *Per ogni funzione ricorsiva in una variabile $f(x)$ esistono un insieme $M_f^{(56)}$ ed un corrispondente vettore P_f tali che, definendo mediante essi e mediante lo schema S_1 le funzioni $\gamma_i(x, z)$ valga*

(23) $\qquad f(x) = \gamma_0(x, \mu t\{\psi(x, t)\} \qquad$ *dove si è posto*

(24) $\qquad \psi(x, t) = \gamma_\varepsilon(x, 55 \cdot [t/55]) \notin M_f^{(56)}.$

La dimostrazione avviene scegliendo il vettore P_f nel seguente modo:

a) le istruzioni con indirizzo positivo sono identiche a quelle che si sarebbero ottenute dalla dimostrazione del teorema 1;

b) le istruzioni con indirizzo da -55 a -1 sono ordinatamente le seguenti:

$j =$	-55	-54	-53	-52	-51	-50	-49	-48	-47	-46	-45	-44	-43	-42	-41	-40	-39
$p_j =$	-4	-4	-3	-3	-44	-44	$+0$	-4	-44	-32	-32	-0	-3	-32	-44	-44	-1
		0		0		0	α	$0-\alpha$			0	γ_α	$0-\gamma_\alpha$	γ_α		0	

$j =$	-38	-37	-36	-35	-34	-33	-32	-31	-30	-29	-28	-27	-26	-25	-24	-23	-22
$p_j =$	-1	-4	-32	-44	-4	-4	-0	-1	-4	-32	-32	-0	-4	-32	-0	-0	-32
	0	$0-\alpha$	δ	$0-\delta$		0	γ_δ	$0-\gamma_\delta$	γ_δ		0	γ_0	$\gamma_\delta-\gamma_0$	$0-(\gamma_\delta-\gamma_0)$		0	$0-(\gamma_\delta-\gamma_0)$

$j =$	-21	-20	-19	-18	-17	-16	-15	-14	-13	-12	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
$p_j =$	-0	-4	-4	-5	$+0$	-3	-3	-44	-4	-1	-1	-44	-3	-1	-1	-44	-1	-0
	$\gamma_\delta-\gamma_0$		0	-1	$\alpha-(-1)$		0	$0-\delta$	δ		0	$0-\delta$	δ		0	$0-\delta$	δ	

$j =$	-3	-2	-1
$p_j =$	-0	-32	-0
	0	$0-(\gamma_\delta-\gamma_0)$	$\gamma_\delta-\gamma_0$

Queste 55 istruzioni costituiscono un programma iterabile privo di salti, salvo che l'istruzione seguente a quella di indirizzo -1 si trova all'indirizzo -55, e dove la cella di indirizzo -56 ha il ruolo di accumulatore. La caratteristica essenziale di questo programma consiste nel fatto che il vettore $\gamma_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \cdots m_f)$ (costruito dalla macchina S_2) ed il vettore $\gamma_i(x, 55\,y)$ (costruito dalla macchina S_1) sono identici e definiti per gli stessi valori di y.

In altre parole: *la macchina* S_1 *simula la macchina* S_2 *nel rapporto* 55 *a* 1. Si può verificare facilmente l'assunto osservando i numeri 0 le formule scritte sotto ad ogni p_j $(j = -55, \cdots -1)$, che rappresentano il contenuto dell'accumulatore $y_{-56}(x, z)$ (dove z è tale che $\beta(z) = j$).

3. – FUNZIONI RICORSIVE IN PIÙ VARIABILI.

È noto [5] il metodo di Cantor per associare ad ogni coppia di numeri x, y un numero intero z mediante la funzione

$$J(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x = T(x + y) + x .$$

Si ha l'identità $z = J(K(z), L(z))$ dove $K(x)$ è la funzione già introdotta e mentre

$$L(x) = \mu u \{T(u) = x - K(x)\} - K(x).$$

Associando ad ogni n–pla $x, x_2, \cdots, x_n$ la funzione

$$z = J_n(x, x_2, \cdots x_n) = J(J(\cdots(J(x, x_2), x_3) \cdots x_{n-1}), x_n)$$

osserviamo che ogni funzione $f_n(x, x_2, \cdots, x_n)$ può scriversi come una funzione φ_n nella sola variabile z:

$$f_n(K^{n-1}(z), L(K^{n-2}(z)), L(K^{n-3}(z)), \cdots, L(K(z)), L(z)) = \varphi_n(z).$$

Ne consegue che se esiste un programma per trasformare preliminarmente una n–pla di numeri $x, x_2, \cdots x_n$ in un numero $z = J_n(x, x_2, \cdots x_n)$ i teoremi 1 e 2 si possono estendere al caso di più variabili. Vale ora il seguente

LEMMA II. – Si consideri la macchina S_2. Il seguente programma $C(u)$ di 26 istruzioni, non iterabile, ha le proprietà:

$$p_9 = u \, , \gamma_\varepsilon(x \, , \bar{y}) = 27 \, , \gamma_0(x \, , \bar{y}) = J(x \, , u) .$$

$$\underset{-x}{-0} \quad \underset{w}{+7} \quad \underset{y-w}{-0} \quad -0 \quad \underset{0}{-1} \quad \underset{0}{-2} \quad \underset{-2}{-1} \quad \underset{(\alpha+2)}{+0} \quad +u \quad +13 \quad \underset{0}{+12}$$

$$\underset{y-w}{-9} \quad \underset{G(w,y+1)}{-9} \quad -0 \quad \underset{0}{-1} \quad \underset{-1}{-1} \quad \underset{y+1-w}{-14} \quad \underset{\substack{\varepsilon \\ 0}}{-4} \quad -0 \quad \underset{0}{-1}$$

$$\underset{+13}{-10} \quad \underset{\substack{\alpha-13 \\ -13}}{+0} \quad -0 \quad \underset{0}{-1} \quad \underset{x}{-24} \quad \underset{J(x,u)}{-22}$$

Il lemma può venire accertato col solito metodo di verifica.

Si è posto $w = u + x$, $G(w \, , 0) = 0$, $G(w \, , y + 1) = G(w \, , y) - (y - w)$ da cui $J(x \, , u) = G(w \, , \mu y \{y + 1 < w\}) + x$.

Vale ora il seguente

TEOREMA 3. – *Ogni funzione ricorsiva* $f_n(x \, , x_2 \, , \cdots x_n)$ *in* n *variabili può essere calcolata dalla macchina* S_2 (*e quindi anche dalla* S_1).

Dimostrazione. – Si costruisce il programma P_{φ_n} dove $\varphi_n(z)$ è la funzione ricorsiva, in una variabile, precedentemente definita. Il programma P_{f_n} è allora così formato:

$$P_{f_n} \equiv C(x_2) \, C(x_3) \cdots C(x_n) \, P_{\varphi_n} .$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. M. TURING, *On computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* « Proc. London Math. Society », ser. 2, vol. 42, pp. 230–265 (1936).

[2] W. L. VAN DER POEL, *The essential types of Operations in an Automatic Computer* in pp. 144–145, N.T.F. Band 4, Friedr. Vieweg & Sohn Verlag Braunschweig (1956).

[3] C. BÖHM, *Tecnica della programmazione*, note del corso omonimo, 1961–62 (non pubblicato).

[4] S. C. KLEEN, *Introduction to Matemathematics*, van Nostrand (1952).

[5] J. ROBINSON, *General recursive functions*, « Proc. Amer. Math. Soc. », *1*, pp. 703–718 (1950).