Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Luigi Antonio Rosati

Su certe varietà dello spazio proiettivo r-dimensionale sopra un corpo non commutativo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 907–912.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_907_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Geometria. — *Su certe varietà dello spazio proiettivo r–dimensionale sopra un corpo non commutativo.* Nota di LUIGI ANTONIO ROSATI, presentata (*) dal Corrisp. G. ZAPPA.

In una Memoria [3] pubblicata sui « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » e riportata nel suo libro *Lectures on modern geometry* [4] B. Segre ha iniziato lo studio della geometria non lineare sopra un corpo sghembo occupandosi della teoria delle schiere rigate e delle loro sezioni e successivamente E. Berz [1] ha dato altre definizioni di coniche, mettendole a raffronto.

In questo lavoro, che ne riassume un altro di più ampie proporzioni in corso di pubblicazione, dopo alcune premesse di carattere algebrico (n. 1), in un S_r proiettivo sopra un corpo K qualunque si introducono certe ipersuperficie generalizzanti le quadriche e da noi chiamate P–ipersuperficie. Su di esse si mettono in evidenza due diverse specie di punti, si dà la definizione di retta tangente ad una P–ipersuperficie in un suo punto di prima specie, si dimostra che tutte le tangenti ad una P–ipersuperficie in un punto di prima specie sono contenute in un iperpiano, si studiano le intersezioni di una P–ipersuperficie con una retta che ne contenga punti di prima specie (n. 2).

Si collega poi questo lavoro allo studio delle coniche e delle quadriche fatto da B. Segre (n. 3) e per inciso si tratta una questione relativa a piani grafici non desarguesiani (n. 4).

Infine si considerano le superficie cubiche e si mettono in evidenza due diverse specie di cubiche gobbe (n. 5).

1. PREMESSE ALGEBRICHE. – Siano: K un corpo qualunque, $V_n(K)$ lo spazio vettoriale a n dimensioni sopra K, T la trasformazione lineare di $V_n(K)$ in sé di equazioni

$$\lambda'_i = \lambda_1 a_{i1} + \cdots + \lambda_n a_{in} \qquad (i = 1, \cdots, n),$$

A la relativa matrice.

Secondo che T (e quindi A) sia invertibile o no diremo che il *determinante destro* di A non è equivalente a zero oppure è equivalente a zero e scriveremo rispettivamente

$$|A|| \not\equiv 0 \quad , \quad |A|| = 0.$$

Chiameremo *equivalenti* due determinanti entrambi equivalenti a zero oppure entrambi non equivalenti a zero. Si hanno immediatamente le seguenti proprietà

1.1. *Se la matrice* B *è ottenuta dalla matrice* A *moltiplicandone a destra tutti gli elementi di una riga o a sinistra tutti gli elementi di una colonna per un elemento di* K *diverso da zero allora* $|A||$ *e* $|B||$ *sono equivalenti.*

(*) Nella seduta del 12 giugno 1962.

1.2. *Matrici ottenute l'una dall'altra mediante lo scambio di righe o di colonne hanno determinanti equivalenti.*

1.3. *Se una matrice ha uguali a zero tutti gli elementi di una riga o di una colonna allora il suo determinante è equivalente a zero.*

1.4. *Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema*

$$x_1 a_{i1} + \cdots + x_n a_{in} = \alpha_i \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

sia risolubile e abbia una sola soluzione è che sia $| a_{ij} \| \neq 0$.

1.5. *Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema omogeneo*

$$x_1 a_{i1} + \cdots + x_n a_{in} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

abbia soluzioni non banali è che sia $| a_{ij} \| = 0$.

1.6. *Se tutti i minori d'ordine* $n - 1$ *della matrice*

$$\begin{pmatrix} h_{21} & \cdots & h_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{n1} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

sono nulli, allora $| h_{ij} \| \; (i, j = 1, \cdots, n)$ *è equivalente a zero, qualunque siano* $h_{11}, \cdots, h_{1n}$.

Indicheremo con AB il prodotto *colonne per righe* delle due matrici dello stesso ordine A, B.

Allora si ha

1.7. *Se* B *è invertibile,* $| \mathrm{AB} \|$ *e* $| \mathrm{BA} \|$ *sono equivalenti ad* $| \mathrm{A} \|$.

In modo analogo a quello tenuto per introdurre i determinanti destri si possono introdurre i *determinanti sinistri*. Indicheremo con $\| \mathrm{A} |$ il determinante sinistro della matrice quadrata A.

Assegnati gli elementi di K $b_{ij}, \beta_{ij} \; (i, j = 1, \cdots, n)$ l'equazione nell'incognita x

$$| b_{ij} x + \beta_{ij} \| = 0 \tag{1}$$

verrà chiamata una *Δ–equazione* e se $| b_{ij} \| \neq 0$ diremo che il suo *grado* è n.

Se A è una qualunque matrice invertibile ad elementi in K e C una matrice invertibile ad elementi nel centro di K, posto $\mathrm{B} = \| b_{ij} x + \beta_{ij} \|$, si ha che la matrice $\mathrm{D} = \mathrm{ABC}$ si può scrivere nella forma della matrice B sicché anche l'equazione $| \mathrm{D} \| = 0$ è una Δ–equazione.

Per 1.7 è chiaro che ogni radice della (1) è anche radice dell'equazione $| \mathrm{D} \| = 0$ e viceversa. Pertanto diremo *equivalenti* le due matrici B, D e analogamente le due equazioni $| \mathrm{B} \| = 0$ e $| \mathrm{D} \| = 0$.

Si dimostra facilmente che

1.8. *Se* $x = u$ *verifica l'equazione* (1) *allora esiste una Δ–equazione equivalente alla* (1) *in cui tutti gli elementi di una colonna sono divisibili a destra per* $x - u$.

In generale non accadrà che se u verifica la (1) si possa trovare una Δ–equazione ad essa equivalente in cui tutti gli elementi di una riga siano divisibili a destra per $x - u$. Nel caso che questo avvenga u si dirà una soluzione di *prima specie* della (1), di *seconda specie* nel caso contrario.

1.9. *Se la* (1) *è una* Δ*–equazione di grado* n *e* u *una sua radice di prima specie le sue rimanenti radici verificano una* Δ*–equazione di grado* $n-1$.

Se questa ha ancora la radice $x = u$, $x = u$ si dice radice *multipla di prima specie* per la (1).

2. P–IPERSUPERFICIE E P–VARIETÀ. – Sia K un corpo qualunque e S_{r-1} $(r > 2)$ lo spazio proiettivo destro a $r-1$ dimensioni sopra K. Indicati rispettivamente con $(x_1, \cdots, x_r)$ e con $[\lambda_1, \cdots, \lambda_r]$ i punti e gli iperpiani di S_{r-1}, supposte invertibili $(\| a_{ij} | \neq 0$, $| b_{ij} \| \neq 0)$ le trasformazioni lineari

$$x'_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{ir} x_r \qquad (i = 1, \cdots, r)$$

$$\lambda'_i = \lambda_1 b_{i1} + \cdots + \lambda_r b_{ir} \qquad (i = 1, \cdots, r)$$

rappresentano, rispettivamente in coordinate di punto e di iperpiano, particolari collineazioni di S_{r-1} che chiameremo *proiettività*.

Ciò posto, siano $X_{i,j}$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ n^2 forme lineari omogenee nelle r variabili $x_1, x_2, \cdots, x_r$ a coefficienti a sinistra e supponiamo che non sia identicamente $| X_{ij} \| = 0$. Per 1.1 l'equazione

$$(2) \qquad | X_{ij} \| = 0$$

è tale che se $(x_1, \cdots, x_r)$ la soddisfa, la soddisfa anche $(x_1 k, \cdots, x_r k)$, qualunque sia $k \neq 0$ in K.

Diremo P–*ipersuperficie* di S_{r-1} di ordine n il luogo $\mathcal{S}$ dei punti di S_{r-1} le cui coordinate omogenee $(x_1, \cdots, x_r)$ verificano l'equazione (2), cioè il luogo di punti di S_{r-1} rappresentato parametricamente al variare di $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ (non tutti nulli) in K dal sistema

$$\lambda_1 x_{i1} + \cdots + \lambda_r x_{ir} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, r).$$

È chiaro che l'ordine di una P–ipersuperficie è un invariante proiettivo.

Chiameremo P–*varietà* di S_{r-1} l'intersezione di due o più P–ipersuperficie di S_{r-1}.

È evidente che l'intersezione di una P–ipersuperficie $\mathcal{S}$ di S_{r-1} con un iperpiano S_{r-2} di S_{r-1} è una P–ipersuperficie di S_{r-2} avente lo stesso ordine di $\mathcal{S}$.

Si dimostra facilmente che

2.1. *L'unione di due* P*–ipersuperficie di* S_r *è una* P*–ipersuperficie di* S_r.

Precisamente se $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ hanno le equazioni $| X_{i,j} \| = 0$, $| Y_{p,q} \| = 0$, la loro unione ha l'equazione $| Z_{r,s} \| = 0$, essendo $\| Z_{rs} \|$ la somma diretta delle due matrici $\| X_{i,j} \|$ e $\| Y_{p,q} \|$.

Riferito S_{r-1} a un sistema di coordinate non omogenee $(x, \cdots)$ la ricerca delle intersezioni di una P–ipersuperficie $\mathcal{S}$ di grado n con una retta t conduce alla risoluzione di una Δ–equazione

$$(3) \qquad | b_{ij} x + \beta_{ij} \| = 0,$$

di grado n se t non ha intersezioni improprie con $\mathcal{S}$.

Se il punto P $(u, \cdots)$ appartiene ad $\mathcal{S}$ e per ogni retta t passante per P l'equazione (3) che fornisce la prima coordinata non omogenea di ciascuna delle intersezioni di t con $\mathcal{S}$ ha u come radice di prima specie (multipla di prima specie) P si dice un *punto di prima specie* (*punto multiplo di prima specie*) di $\mathcal{S}$, in caso contrario P si dice di *seconda specie*.

2.2. *Le tangenti ad una* P–*ipersuperficie in un punto semplice* A *di prima specie sono le rette di un iperpiano* α *passante per* A.

Chiameremo α l'iperpiano tangente in A.

2.3. *Una retta passante per* $n - 1$ *punti di prima specie di una* P–*ipersuperficie* $\mathcal{S}$ *d'ordine* n *e non appartenente ad* $\mathcal{S}$ *ha al massimo* n *intersezioni con* $\mathcal{S}$.

I seguenti teoremi chiariscono il significato geometrico della definizione di P–ipersuperficie.

2.4. *Dati in* S_r n *sistemi lineari proiettivi di iperpiani di dimensione* n, *il luogo dei punti comuni a iperpiani corrispondenti è una* P–*ipersuperficie di* S_{r-1} *d'ordine* n *passante per i sostegni dei sistemi lineari considerati.*

2.5. *La più generale* P–*ipersuperficie di* S_r *d'ordine* n *si può ottenere come intersezione con* S_r *di una* P–*ipersuperficie generata al modo dal teorema* 2.4 *e appartenente ad un* S_n *di una conveniente dimensione* $n > r$.

3. QUADRICHE E CONICHE. – Diremo *quadriche* e *coniche* rispettivamente le P–superficie del second'ordine di S_3 e le P–curve del second'ordine di S_2. E diremo quadriche e coniche *degeneri* le quadriche e le coniche di cui facciano parte i punti di un piano o i punti di una retta. Diremo infine *completamente degeneri* le quadriche e le coniche che siano rispettivamente l'unione di due piani o l'unione di due rette.

Una conica semplicemente degenere è costituita da una retta e da un insieme di punti che B. Segre [3] ha chiamato C–*configurazione*.

Si vede subito che le quadriche e le coniche non degeneri coincidono rispettivamente con le quadriche e con le coniche introdotte da Segre [3] e risulta facile dimostrare che i punti di prima specie di una quadrica si distribuiscono sulle direttrici.

Il piano tangente ad una quadrica in un suo punto di prima specie la taglia secondo una conica completamente degenere, unione della direttrice e della generatrice passanti per quel punto.

4. UNA QUESTIONE RELATIVA A PIANI GRAFICI NON DESARGUESIANI. – In [3] B. Segre ha posto il problema, enunciato anche da L. Lombardo-Radice [2], di vedere se in qualche piano non–desarguesiano esistano insiemi di punti dotati di proprietà analoghe a quelle delle coniche o delle C–configurazioni. Qui indichiamo un insieme di punti appartenenti ad un piano di traslazione dotato di proprietà analoghe a quelle delle C–configurazioni.

Sia R un quasicorpo associativo destro $(a(b+c) = ab + ac)$ d'ordine q (q numero cardinale finito o infinito). Sia H il nucleo di R cioè il corpo formato dagli elementi c di R per cui vale la proprietà distributiva a sinistra $((a+b)c = ac + bc)$.

Gli elementi di R permutabili con t costituiscono un corpo L contenente, come del resto anche H, il centro C di R. Indicheremo con m l'ordine di L.

Supponiamo poi che R sia tale che H contenga propriamente C e indichiamo con t un elemento di H — C e siano: α il piano (non desarguesiano di traslazione) sopra R, g la retta impropria di α, I l'insieme dei punti propri di α le cui coordinate (x , y) soddisfano l'equazione

$$x = yt.$$

Sia poi $\mathfrak{I}$ l'insieme dei punti di g di coordinate $(ct\,c^{-1} , 1 , 0)$ (c variabile in R). Poiché per ipotesi H contiene propriamente C, il numero dei punti appartenenti ad $\mathfrak{I}$ sarà certamente maggiore di uno.

Ebbene come in [3] si può vedere che I gode delle proprietà trovate da B. Segre per le C–configurazioni.

Precisamente:

a) *ogni retta congiungente un punto* M *di* I *con un punto* N *di* $\mathfrak{I}$ *contiene* m *punti appartenenti ad* I;

b) *ogni retta congiungente due distinti punti* M , M′ *appartenenti ad* I *incontra* g *in un punto* N *appartenente ad* I *e quindi viene a contenere* m *punti di* I.

Se poi R è finito si ha:

c) *ogni retta di* α *distinta da* g *che tagli* g *in un punto* O *che non appartenga ad* $\mathfrak{I}$ *contiene uno ed un solo punto di* I.

5. LE SUPERFICIE CUBICHE E LE CURVE CUBICHE GOBBE. – Come caso particolare di 2.4 si ha:

5.1. *Se* A , B , C *sono i centri di tre stelle proiettive di piani, il luogo dei punti comuni alle terne di piani corrispondenti è una superficie cubica avente* A , B , C *come punti di prima specie.*

Per 1.9 le ulteriori intersezioni di una superficie cubica con una retta passante per un punto di prima specie dipendono da una Δ–equazione di secondo grado. Pertanto per la ricerca di esse si potranno utilizzare i risultati ottenuti da B. Segre [3] per la ricerca delle intersezioni di una quadrica e di una retta.

Si vede facilmente che:

5.2. *Dati tre fasci proiettivi di piani ad assi sghembi il luogo delle intersezioni delle terne di piani corrispondenti è una curva,* γ, *residua intersezione di due quadriche aventi una direttrice in comune.*

Chiameremo γ *cubica gobba di prima specie.*

5.3. *Il luogo,* δ, *dei punti comuni a raggi corrispondenti in due stelle proiettive è una curva passante per i loro centri, residua intersezione di due quadriche aventi una generatrice in comune.*

Chiameremo δ *cubica gobba di seconda specie.*

BIBLIOGRAFIA.

[1] E. BERZ, *Kegelschnitte in desarguesschen Ebenen*, « Math. Zeitschrift », 78 Bd., pp. 55–85.
[2] L. LOMBARDO-RADICE, *Piani grafici finiti non desarguesiani*, G. Denaro, Palermo.
[3] B. SEGRE, *Elementi di geometria non lineare sopra un corpo sghembo*, « Rend. Circolo Mat. di Palermo », ser. II, t. 7, pp. 81–122 (1958).
[4] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma 1961.