Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Santoro

Sistemi differenziali quasi lineari con condizioni lineari e teoremi di unicità

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 903–906.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_903_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Equazioni differenziali. — *Sistemi differenziali quasi lineari con condizioni lineari e teoremi di unicità* [*]. Nota di PAOLO SANTORO, presentata [**] dal Socio G. SANSONE.

Sia dato il seguente problema

(E) $$\dot{x} = A(t)\,x + g(t\,,x)\,,$$

(C) $$\int_{\Delta} dF\,x = \chi\,,$$

dove:
$A(t)$ è una matrice $n \times n$ definita per $t \in \Delta = [a\,,b]$ ed ivi misurabile ed esista una funzione $\mu(t)$ sommabile in Δ tale che

(1) $$|A(t)| \leq \mu(t)\ ^{(1)};$$

$x = x(t)$ è un n–vettore definito in Δ;

$\dot{x} = dx/dt$;

$g(t\,,u)$ è un n–vettore definito per $t \in \Delta\,, u \in R^n$ (R^n spazio euclideo ad n dimensioni), continuo rispetto ad u, misurabile rispetto a t, ed esista una funzione $\gamma(t)$ sommabile e tale che

(2) $$|g(t\,,u)| \leq \gamma(t) \qquad \text{per } t \in \Delta\,, u \in R^n\,;$$

$F = F(t)$ è una matrice $n \times n$ a variazione limitata in Δ;

$\int_{\Delta} dF\,x$ è un integrale di Stieltjes;

χ è un n–vettore di R^n.

È noto che, indicato con $Y(t)$ una delle matrici fondamentali dell'equazione

$$\dot{y} = A(t)\,y$$

e supposto la matrice

$$D = \int_{\Delta} dF\,Y(t)$$

invertibile, il problema (E) (C) si riduce alla risoluzione dell'equazione

(L) $$x(t) = Y(t)\,D^{-1}\chi + \int_{\Delta} G(t\,,s)\,g(s\,,x(s))\,ds\,,$$

(*) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 6 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1961–62.

(**) Nella seduta del 12 giugno 1962.

(1) Data una matrice A intenderemo con $|A|$ il valore $\Sigma\,|A_{ik}|$. È anche inteso che il prodotto è fatto righe per colonne.

dove $G(t,s)$ (matrice di Green) è data da

$$G(t,s)=\begin{cases} -Y(t)\,D^{-1}\int_s^b dF\,Y(\tau)\,Y^{-1}(s)+Y(t)\,Y^{-1}(s) & \text{per } a\leq s<t\leq b \\ -Y(t)\,D^{-1}\int_s^b dF\,Y(\tau)\,Y^{-1}(s) & \text{per } a\leq t\leq s\leq b\,. \end{cases}$$

È anche noto [2] che il problema (E) (C) (e, quindi, l'equazione (L)) ammette soluzioni.

Vogliamo qui dimostrare il seguente

TEOREMA: Se

$$|g(t,x)-g(t,y)|\leq\psi(t,|x-y|) \tag{3}$$

con $\psi(t,u)$ *non negativa, non decrescente e continua per* $u\geq 0$, *sommabile per* $t\in\Delta$ *per ogni fissato* u, *e tale che l'equazione*

$$u(t)=\int_\Delta |G(t,s)|\,\psi(s,u(s))\,ds \tag{4}$$

abbia l'unica soluzione $u(t)\equiv 0$ *per* $t\in[a,b]$; *e se inoltre, per un* Γ *tale che* [3]

$$|G(t,s)|\leq\Gamma \tag{5}$$

esiste almeno un $\mathfrak{M}>0$ *tale che*

$$\Gamma\int_\Delta\psi(s,\mathfrak{M})\,ds\leq\mathfrak{M}\,; \tag{6}$$

allora non possono esistere due soluzioni distinte $x(t)$ *ed* $y(t)$ *del problema* (E) (C) (*ovvero del problema* (L)) *tali che:*

$$|x(t)-y(t)|\leq\mathfrak{M}\qquad\text{per}\quad t\in\Delta\,.$$

Dimostriamo prima che se $\alpha(t)$ è una funzione definita e continua per $t\in\Delta$ e tale che

$$0\leq\alpha(t)\leq\mathfrak{M}\,, \tag{7}$$

$$\alpha(t)\leq\int_\Delta|G(t,s)|\,\psi(s,\alpha(s))\,ds \tag{8}$$

(2) Cf. R. CONTI, *Equazioni differenziali ordinarie quasi lineari con condizioni lineari*, «Ann. Mat. Pura Appl.» (4), *57*, 49–62 (1962).

(3) Dalla definizione di $G(t,s)$ è agevole trovare valutazioni di Γ in funzione di Y, Y^{-1}, D^{-1} ed F, cfr. ad esempio R. CONTI, *Sistemi differenziali ordinari con condizioni lineari*, «Ann. Mat. Pura» (4), *46*, 109–130 (1958).

con $\psi(t, u)$ e $G(t, s)$ soddisfacenti le ipotesi del teorema, allora $\alpha(t) \equiv 0$ per $t \in \Delta$. Per questo cominciamo col dimostrare preventivamente che la soluzione dell'equazione (4) può ottenersi mediante le approssimazioni successive:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0(t) = \alpha(t) \\ u_n(t) = \int\limits_{\Delta} |G(t, s)| \, \psi(s, u_{n-1}(s)) \, ds . \end{array} \right. \tag{9}$$

Per la non decrescenza di $\psi(t, u)$ rispetto alla seconda variabile, si ha:

$$\alpha(t) = u_0(t) \leq u_1(t) \leq \cdots \leq u_n(t) \leq \cdots, \tag{10}$$

cioè la successione $\{u_n(t)\}$ definita dalle (9) è non decrescente.

Inoltre, per le (5), (6) e (7), è

$$0 \leq u_1(t) \leq \Gamma \int\limits_{\Delta} \psi(s, \mathfrak{M}) \, ds \leq \mathfrak{M} ;$$

e supposto $0 \leq u_{n-1}(t) \leq \mathfrak{M}$ si ha

$$0 \leq u_n(t) \leq \Gamma \int\limits_{\Delta} \psi(s, \mathfrak{M}) \, ds \leq \mathfrak{M} ,$$

onde le $u_n(t)$ sono equilimitate e, pertanto, esiste

$$u(t) = \lim_{n \to \infty} u_n(t)$$

ed è anche

$$u(t) = \int\limits_{\Delta} |G(t, s)| \, \psi(s, u(s)) \, ds$$

e quindi

$$u(t) \equiv 0 \qquad \text{per} \quad t \in \Delta .$$

Ma da (10) si ha

$$0 \leq \alpha(t) \leq u(t) \qquad \text{per} \quad t \in \Delta$$

e quindi

$$\alpha(t) \equiv 0 \qquad \text{per} \quad t \in \Delta .$$

Supponiamo ora, per assurdo, che vi siano due soluzioni distinte $x(t)$ ed $y(t)$ del problema (E) (C) per cui

$$|x(t) - y(t)| \leq \mathfrak{M} .$$

Dalla (3) si ha

$$|x(t) - y(t)| \leq \int\limits_{\Delta} |G(t, s)| \, |g(s, x(s)) - g(s, y(s))| \, ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Delta} |G(t, s)| \, \psi(s, |x(s) - y(s)|) \, ds$$

e, posto

$$\alpha(t) = |x(t) - y(t)| ,$$

$\alpha(t)$ soddisfa le (7) ed (8) e quindi $\alpha(t) \equiv 0$, ciò che è assurdo avendo supposto $x(t)$ ed $y(t)$ distinte.

COROLLARIO 1: *Se la* (5) *è soddisfatta per ogni* $\mathfrak{M} > 0$ *il problema* (E) (C), *e quindi l'equazione* (L), *non può avere due soluzioni distinte.*

COROLLARIO 2 [4]: *Son soddisfatti i requisiti del Corollario 1 se*

$$(3') \qquad |g(t,x) - g(t,y)| \leq \lambda(t)\,|x-y| \qquad per \quad t \in \Delta,$$

con $\lambda(t)$ *sommabile per* $t \in \Delta$, *se*

$$(5') \qquad \Gamma \int_{\Delta} \lambda(s)\, ds \leq 1,$$

e se inoltre l'equazione

$$(4') \qquad u(t) = \int_{\Delta} |G(t,s)|\, \lambda(s)\, u(s)\, ds$$

ha la sola soluzione nulla.

Notiamo che mentre nella (5') vale il segno $\leq$ in altri studi sulla equazione (4') da altri Autori si richiede che valga il segno $<$.

(4) Cfr. loc. cit. in (3).