Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Rosanna Bressan

A proposito di un teorema di Bolza

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 899–902.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_899_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Matematica. — *A proposito di un teorema di Bolza.* Nota di ROSANNA BRESSAN, presentata [*] dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

In questa Nota mi propongo di trasportare dagli spazi euclidei agli spazi metrici una proposizione dovuta sostanzialmente al Bolza [1]. Precisamente mi propongo di dimostrare che:

Se la trasformazione univoca e continua t porta lo spazio metrico H *sullo spazio metrico* K, *applicando le porzioni aperte di* H *sulle porzioni aperte di* K [2]; *se t subordina una corrispondenza biunivoca fra il sottoinsieme* (*chiuso e*) *compatto* I, *di* H *e il sottoinsieme* (*chiuso e compatto*) J *di* K, *ed è localmente invertibile nei punti di* I [3]; *se lo spazio* K *è localmente connesso nei punti di* J [4], *la trasformazione t subordina trasformazioni univocamente invertibili anche in convenienti intorni aperti di* I.

Raggiungo questo risultato [5] facendo vedere come la dimostrazione del teorema di Bolza data da Scorza Dragoni [6] conservi sostanzialmente la sua validità anche nelle ipotesi attuali.

1. Alla dimostrazione del teorema premettiamo quella di un lemma sugli spazi compatti e localmente connessi [7].

(*) Nella seduta del 12 giugno 1962.

(1) O. BOLZA, *Lectures on the calculus of variations* (Chicago 1904), § 34; O. BOLZA, *Ein Satz über eindentige Abbildung und seine Anwendung in der Variationsrechnung* «Mathematische Annalen», vol. 63, pp. 246–252 (1907).

(2) Salvo esplicito avviso in contrario mi avvalgo della terminologia adottata da LEFSCHETZ nella *Introduction to topology* (Princeton University Press., 1949), Cap. I. Si noti che basterebbe imporre a t di portare le porzioni aperte di H su porzioni aperte di K per essere sicuri che t, in quanto continua, porta le porzioni aperte di H sulle porzioni aperte di K.

(3) Una trasformazione univoca, t, è localmente invertibile in un punto, P, del suo dominio, H, se in H si può determinare un intorno aperto di P in cui la trasformazione subordinata da t sia biunivoca.

(4) Uno spazio K si dice, qui, localmente connesso in un suo punto, P, se scelto comunque in K un intorno aperto, ρ, di P, in ρ si può determinare un intorno di P aperto e connesso. Cfr. KURATOWSKI, *Topologie*, «Polskie Torvarzystwo Matematyezne», vol. II, 161, Varsavia 1952.

(5) Ottenuto nell'ambito dell'attività di uno dei gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la matematica del C. N. R.

(6) SCORZA DRAGONI, *Maggiore determinazione di un teorema fondamentale dell'analisi e sue applicazioni*, «Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Roma», serie IV, vol. I, pp. 180–185 (1937). La deduzione di SCORZA DRAGONI presenta a p. 185 una lieve lacuna, peraltro già colmata da questo stesso autore nel secondo volume dei suoi *Elementi di Analisi matematica*, n. 360, Cedam, Padova 1961.

(7) Cfr. il primo dei lavori citati in (6), n° 1.

Sia K *uno spazio metrico e* J *un suo sottoinsieme compatto. Lo spazio* K *sia localmente connesso nei punti di* J. *Ad ogni punto*, R, *di* J *sia associato un intorno sferico*, S (R), *aperto, col centro in* R. *Allora si possono determinare* n *punti*, $R_1, R_2, \cdots, R_n$, *di* J *ed* n *loro rispettivi intorni aperti e connessi*, $s(R_1), s(R_2), \ldots, s(R_n)$, *tali che:*

a) *ogni punto di* J *appartenga almeno ad uno degli intorni* $s(R_1), \cdots, s(R_n)$;

b) *gli involucri chiusi di* $s(R_1), \cdots, s(R_n)$ *siano rispettivamente contenuti in* $S(R_1), \cdots, S(R_n)$;

c) *l'involucro chiuso di*

$$s(R_i) + s(R_j) \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$$

sia contenuto o in $S(R_i)$ *o in* $S(R_j)$ *ogni volta che* $s(R_i) \cdot s(R_j)$ *non sia vuoto.*

Infatti, per ogni punto, R, di J si indichi $\rho(R)$ l'intorno sferico aperto che ha centro in R e raggio uguale a un quarto del raggio di S (R). Sia $s(R)$ un intorno aperto e connesso di R contenuto in $\rho(R)$. Ogni insieme $s(R)$ soddisfa alla condizione b), nel senso che l'involucro chiuso di $s(R)$ è contenuto in S (R).

La famiglia degli insiemi $s(R)$ dà luogo ad una copertura di J e, poiché l'insieme J è compatto, in J si possono determinare i punti $R_1, R_2, \cdots, R_n$ in modo tale che $s(R_1), s(R_2), \cdots, s(R_n)$ costituiscano ancora una copertura di J e quindi soddisfino alla condizione a).

Supposto ora che $s(R_i)$ e $s(R_j)$ abbiano punti comuni, a maggior ragione avranno punti comuni $\rho(R_i)$ e $\rho(R_j)$. Allora, se per i due raggi r_i e r_j di $\rho(R_i)$ e $\rho(R_j)$ risulta, ad esempio, $r_i \geq r_j$, ogni punto dell'involucro chiuso di $\rho(R_j)$ ha una distanza da R_i che non supera $3 r_i$; e quindi una tal circostanza si verifica anche per ogni punto dell'involucro chiuso di $s(R_j)$. Cioè l'involucro chiuso di $s(R_j)$ è contenuto in $S(R_i)$. Da ciò segue subito che anche la condizione c) è soddisfatta.

2. Passiamo adesso alla dimostrazione del teorema.

Poiché la trasformazione t è localmente invertibile in I, per ogni punto, P, di I, si può determinare un intorno sferico aperto, $\Sigma'(P)$, in cui la trasformazione subordinata da t sia biunivoca. Sia $S'(R)$ l'intorno aperto di $R = t(P)$ in cui t muta $\Sigma'(P)$.

L'insieme $I - I \cdot \Sigma'(P)$ è chiuso e quindi compatto, attesa la compattezza di I; di conseguenza è chiusa anche la sua immagine nella t. E questa immagine non contiene R, dato che $I - I \cdot \Sigma'(P)$ non contiene P e data la biunivocità della trasformazione di I su J subordinata dalla t. In $S'(R)$ si può perciò determinare un intorno sferico aperto, S (R), col centro in R, e privo di punti comuni con l'insieme $t(I - I \cdot \Sigma'(P))$. Allora tutti i punti comuni a S (R) e J sono immagini, nella t, di punti comuni a $\Sigma'(P)$ e I. E sia $\Sigma(P)$ la controimmagine di S (R) nella trasformazione biunivoca di $\Sigma'(P)$ in $S'(R)$ subordinata da t.

Le ipotesi e il lemma assicurano che si possono determinare n punti, $R_1, R_2, \cdots, R_n$, di J ed n loro rispettivi intorni aperti e connessi, $s_1, s_2, \cdots, s_n$, tali che $s_1, s_2, \cdots, s_n$ costituiscano una copertura di J; che l'involucro chiuso dell'insieme s_i $(i = 1, \cdots, n)$ sia contenuto in $S(R_i)$; che l'involucro chiuso dell'insieme $s_i + s_j$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ sia contenuto o in $S(R_i)$ o in $S(R_j)$ ogni volta che l'insieme $s_i \cdot s_j$ non sia vuoto.

Siano $P_1, P_2, \cdots, P_n$ le controimmagini di $R_1, R_2, \cdots, R_n$ nella trasformazione di I in J subordinata da t; $P_1, P_2, \cdots, P_n$ sono anche le controimmagini di $R_1, R_2, \cdots, R_n$ rispettivamente nelle trasformazioni subordinate da t in $\Sigma(P_1), \Sigma(P_2), \cdots, \Sigma(P_n)$. Sia σ_i la controimmagine di s_i nella trasformazione di $\Sigma(P_i)$ su $S(R_i)$ subordinata da t. Poniamo, per semplicità di scrittura, $\Sigma_i = \Sigma(P_i)$ e $S_i = S(R_i)$.

Poiché la trasformazione di Σ_i su S_i subordinata da t è biunivoca, continua e muta insiemi aperti in insiemi aperti, essa è anche bicontinua. Perciò gli insiemi $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$, sono aperti e connessi dal momento che tali sono gli insiemi $s_1, s_2, \cdots, s_n$. Posto

$$F = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n \quad \text{e} \quad G = s_1 + \cdots + s_n,$$

F e G sono due intorni aperti rispettivamente di I e J. Adesso dimostreremo che la trasformazione di F su G subordinata da t è biunivoca. Allo scopo basterà far vedere che t^{-1} è univoca in G.

Sia B un punto di G e fra gli intorni s_i siano, per esempio, $s_1, \cdots, s_r$ tutti quelli che lo contengono. Siano quindi $A_1, \cdots, A_r$ le rispettive controimmagini di B nelle trasformazioni subordinate da t su $\sigma_1, \cdots, \sigma_r$. Sono queste tutte le controimmagini di B nella trasformazione subordinata da t in F. Infatti t associ al punto, A, di F il punto B. Allora A appartiene ad almeno uno, σ_k, degli intorni $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ e B appartiene necessariamente all'intorno s_k; quindi A coincide con uno dei punti $A_1, \cdots, A_r$. Si tratta ora di far vedere che tutti i punti $A_1, \cdots, A_r$ coincidono fra di loro.

Se $r = 1$ non c'è niente da dimostrare. Nel caso contrario consideriamo, ad esempio, A_1 ed A_2. L'insieme $s_1 \cdot s_2$ non è vuoto, perché contiene B. Perciò l'involucro chiuso di $s_1 + s_2$ o è contenuto in S_1 o è contenuto in S_2. Supponiamo che si presenti il primo caso. Diciamo τ_2 la controimmagine di s_2 nella trasformazione subordinata da t su Σ_1. Poiché la t è continua, l'insieme τ_2 è aperto dal momento che tale è s_2. Inoltre Σ_1 contiene la frontiera di τ_2; infatti S_1 contiene l'involucro chiuso di s_2; ma t subordina in Σ_1 una trasformazione bicontinua, quindi, in questa trasformazione, la controimmagine dell'involucro chiuso di s_2 è una porzione chiusa di Σ_1; d'altra parte questa controimmagine contiene τ_2 e quindi essa contiene anche la frontiera di τ_2.

Sia Q_2 la controimmagine di R_2 nella trasformazione subordinata da t in Σ_1 e quindi in quella subordinata in $\Sigma'(P_1)$. Dimostriamo che Q_2 coincide con P_2. Infatti, R_2 è un punto di J contenuto in S_1, perciò la sua controimmagine, Q_2, nella trasformazione biunivoca subordinata da t in $\Sigma'(P_1)$ è un punto comune a $\Sigma'(P_1)$ e a I, come è stato già osservato. Perciò Q_2 e P_2, in quanto punti di I aventi la medesima immagine, R_2, nella t, devono necessariamente coincidere. In conclusione τ_2 e σ_2 hanno in comune il punto P_2, e la loro intersezione non è vuota.

Dimostriamo adesso che σ_2 non contiene punti della frontiera di τ_2. Supponiamo che vi sia almeno un punto, P, comune a σ_2 e alla frontiera di τ_2. Allora P, in quanto punto della frontiera dell'insieme aperto τ_2, appartiene a Σ_1, senza appartenere a τ_2. Inoltre, in quanto punto di σ_2, P è trasformato da t in un punto, R, di s_2. Sia Q la controimmagine di P nella trasformazione di Σ_1 su S_1 subordinata da t; Q è un punto di τ_2 e pertanto è diverso da R. In Σ_1 vi sono quindi due punti distinti, R e Q, ai quali t associa il medesimo punto, P, di S_1. E questo è assurdo perché la trasformazione di Σ_1 in S_1 subordinata da t è biunivoca.

Facciamo adesso vedere che σ_2 è contenuto in τ_2. Infatti, supposto per assurdo che σ_2 non appartenga a τ_2, la intersezione $\sigma_2 \cdot \tau_2$ è un insieme, σ, non vuoto, aperto e distinto da σ_2. Dimostriamo che l'insieme $\sigma_2 - \sigma$, che non è vuoto, è anche aperto. Infatti la frontiera, $\mathfrak{F}(\sigma_2 - \sigma)$, di $\sigma_2 - \sigma$ è contenuta nella somma, $\mathfrak{F}(\sigma_2) + \mathfrak{F}(\sigma)$ delle frontiere, $\mathfrak{F}(\sigma_2)$, di σ_2 e, $\mathfrak{F}(\sigma)$, di σ. Poiché σ è contenuto in τ_2, la sua frontiera è contenuta nell'involucro chiuso di τ_2, e l'insieme $\sigma_2 - \sigma$, non avendo punti comuni né con τ_2, né con la frontiera di τ_2, ha intersezione vuota anche con $\mathfrak{F}(\sigma)$. Inoltre σ_2 è aperto e quindi non ha punti comuni con la propria frontiera; perciò, a maggior ragione, $\sigma_2 - \sigma$ ha intersezione vuota anche con $\mathfrak{F}(\sigma_2)$. E in definitiva $\sigma_2 - \sigma$ ha intersezione vuota con la propria frontiera, cioè è aperto. Ma poiché risulta $\sigma_2 = \sigma + (\sigma_2 - \sigma)$, σ_2 sarebbe somma di due insiemi non vuoti, aperti e disgiunti e non sarebbe connesso.

A questo punto la coincidenza dei punti A_1 e A_2 è subito dimostrata. Infatti A_2, in quanto punto di σ_2 e quindi di τ_2, appartiene a Σ_1, al pari di A_1. Quindi A_1 e A_2 coincidono perché essi hanno entrambi come immagine nella t il punto B e perché la trasformazione subordinata da t in Σ_1 è biunivoca. E la dimostrazione è terminata.