Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Witold Pogorzelski

Étude de la continuité des solutions du système parabolique dependant d'un paramètre. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 891–898.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_891_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi matematica. — *Étude de la continuité des solutions du système parabolique dépendant d'un paramètre* (*). Nota I di WITOLD POGORZELSKI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

§ 1. – INTRODUCTION.

Soit un système parabolique d'équations aux dérivées partielles d'ordre $M \geq 2$

$$(1) \qquad \hat{\Psi}^{(\alpha)}(u_1, \cdots, u_N) = \sum_{\substack{0 \leq k_1 + \cdots + k_n \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} A_{\alpha j}^{k_1 \cdots k_n}(X, t, \lambda) \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0$$

$(\alpha = 1, \cdots, N)$ aux $N \geq 1$ fonctions inconnues $u_1(X, t) \cdots u_N(X, t)$. Nous admettons les hypothèses suivantes.

I. – Les coefficients $A_{\alpha j}$ sont des fonctions complexes du point $X(x_1, \cdots, x_n)$ de l'espace euclidien E, de la variable réelle t et du paramètre réell λ, définies et *bornées* dans la région:

$$(2) \qquad [X \in E, 0 \leq t \leq T, -R \leq \lambda \leq +R],$$

vérifiant les conditions de Hölder suivantes

$$(3) \qquad |A_{\alpha j}^{k_1 \cdots k_n}(X, t, \lambda) - A_{\alpha j}^{k_1 \cdots k_n}(X', t', \lambda)| \leq \text{Const}\,[|XX'|^h + |t - t'|^{h'}]$$

si $k_1 + \cdots + k_n = M$ et

$$(4) \qquad |A_{\alpha j}^{k_1 \cdots k_n}(X, t, \lambda) - A_{\alpha j}^{k_1 \cdots k_n}(X', t, \lambda)| \leq \text{Const}\,|XX'|^h$$

si $k_1 + \cdots + k_n < M$; $0 < h, h' \leq 1$; on a désigné par $|XX'|$ la distance euclidienne des points X, X'. On admet en outre la *continuité* des coefficients, par rapport aux variables t et λ, *uniforme* dans la région (2).

II. – Conformément à la définition de Petrovsky [1] de la parabolicité du système (1), toutes les racines en ρ de l'équation

$$(5) \qquad \det_{\alpha, j} \left| \sum_{k_1 + \cdots + k_n = M} A_{\alpha j}^{k_1 \cdots k_n}(X, t, \lambda)(is_1)^{k_1} \cdots (is_n)^{k_n} - \delta_{\alpha j}\, \rho \right| = 0$$

($\delta_{\alpha j}$ – symbole de Kronecker) ont leurs parties réelles inférieures à un nombre négatif fixé $-\delta$

$$(5') \qquad \text{Re}(\rho) < -\delta < 0$$

pour toutes les valeurs des variables réelles $s_1, \cdots, s_n$ vérifiant l'égalité

$$(6) \qquad s_1^2 + \cdots + s_n^2 = 1$$

(*) Institut Mathématique de l'Académie Polonaise des Sciences.
(**) Nella seduta del 12 giugno 1962.

et pour tout point de la région

$$X \in E \quad , \quad 0 \leq t \leq T \quad , \quad -R \leq \lambda \leq +R .$$

Cette hypothèse exige donc que le degré M du système (1) soit *pair*.

En 1956 S. Eidelmann [2] a construit une matrice des solutions fondamentales du système (1) sous l'hypothèse que les coefficients $A_{\alpha j}$ admettent les dérivées spatiales d'ordre M.

En 1957 l'auteur de cet article [3] a construit une matrice des solutions fondamentales du système (1) sous l'hypothèse plus générale (3) et (4). Nous désignerons actuellement les éléments de cette matrice par les symboles

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X, t; Y, \tau) \tag{7}$$

pour mettre en évidence leur dépendance du paramètre λ figurant dans le système (1). D'après le travail [3] les éléments (7) sont exprimés par les formules

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X, t; Y, \tau) &= W_{\alpha\beta}^{(\lambda)Y,\tau}(X, t; Y, \tau) \\ &+ \int_{\tau}^{t}\iiint_{E} \sum_{\gamma=1}^{N} W_{\alpha\gamma}^{(\lambda)Z,\zeta}(X, t; Z, \zeta)\, \Phi_{\gamma\beta}^{(\lambda)}(Z, \zeta; Y, \tau)\, dZ\, d\zeta\end{aligned} \tag{8}$$

où $X(x_1, \cdots, x_n)$, $Y(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ sont deux points arbitraires différents de l'espace E et $\tau < t$ deux valeurs arbitraires dans l'intervalle fermé $(0, T)$. Les fonctions $W_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ sont les éléments d'une matrice, dite des quasi-solutions données par les intégrales de Fourier:

$$W_{\alpha\beta}^{(\lambda)Z,\zeta}(X, t; Y, \tau) = \frac{1}{(2\pi)}n \iiint_{E} \upsilon_{\alpha}^{\beta}(t, \tau; Z, \zeta; S, \lambda)\, e^{i\sum_{\nu=1}^{n}(s_\nu - \xi_\nu)}\, dS \tag{9}$$

étendues à tout l'espace euclidien E des variables $S(s_1, \cdots, s_n)$; Z désigne un point arbitraire de l'espace E, ζ – une valeur arbitraire dans l'intervalle $(0, T)$. Les fonctions $\upsilon_1^{\beta}, \cdots, \upsilon_N^{\beta}$ $(\beta = 1, \cdots, N)$, pour β fixé, forment une solution du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{d\upsilon_{\beta}^{\alpha}}{dt} = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=M \\ 1\leq j\leq N}} A_{\alpha j}^{k_1\cdots k_n}(Z, \zeta, \lambda)(is_1)^{k_1}\cdots(is_n)^{k_n}\, \upsilon_j^{\beta}(t, \tau; Z, \zeta; S, \lambda) \tag{10}$$

(où Z, ζ, s_ν, λ sont des paramètres fixés) avec la condition initiales

$$\lim_{t\to\tau} \upsilon_{\alpha}^{\beta} = \delta_{\alpha\beta} \tag{11}$$

Les fonctions $\Phi_{\alpha\beta}^{(\lambda)}$ dans les fomules (8) forment, pour β fixé, une solution du système d'équations intégrales singulières de Volterra

$$\begin{aligned}\Phi_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X, t; Y, \tau) &= \hat{\Psi}_{(j)X,t}^{(\alpha)}[W_{(j)\beta}^{(\lambda)Y,\tau}(X, t; Y, \tau)] \\ &+ \int_{\tau}^{t}\iiint_{E} \sum_{\gamma=1}^{N} \hat{\Psi}_{(j)X,t}^{(\alpha)}[W_{(j)\gamma}^{(\lambda)Z,\zeta}(X, t; Z, \zeta)]\, \Phi_{\gamma\beta}^{(\lambda)}(Z, \zeta; Y, \tau)\, dZ\, d\zeta\end{aligned} \tag{12}$$

où $\hat{\Psi}^{(\alpha)}_{(j)X,t}(u_{(j)})$ désigne une opération différentielle sur le système de fonctions $u_{(j)} = (u_1, \cdots, u_n)$, par rapport aux variables X et t, définie par les formules (1).

Les fonctions $\Gamma^{(\lambda)}_{1\beta}, \cdots, \Gamma^{(\lambda)}_{N\beta}$, pour β fixé, forment une solution du système (1) en tout point $X \neq Y$ de l'espace E pour $0 \leq \tau < t < T$. A l'aide de cette solution on peut définir les solutions plus générales du système (1) étudiées par l'auteur dans les travaux [4] et [5].

Dans ce travail nous étudierons par rapport au paramètre λ les trois solutions du système (1)

$$\{U_\alpha(X, t)\} \quad , \quad \{J_\alpha(X, t)\} \quad , \quad \{V_\alpha(X, t)\}$$

qu'on appelle successivement:

1) potentiel de charge spatiale aux composants

$$U^{(\lambda)}_\alpha(X, t) = \int_0^t \iiint_E \sum_{\beta=1}^N \Gamma^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(X, t : Y, \tau)\, \rho_\beta(Y, \tau)\, dY\, d\tau; \tag{13}$$

2) les intégrales de Poisson–Weierstrass

$$J^{(\lambda)}_\alpha(X, t) = \iiint_E \sum_{\beta=1}^N \Gamma^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(X, t; Y, 0) f_\beta(Y)\, dY; \tag{14}$$

3) potentiel de simple couche aux composants

$$V^{(\lambda)}_\alpha(X, t) = \int_0^t \iint_S \sum_{\beta=1}^N \Gamma^{(\lambda)}_{\alpha\beta}(X, t; Q, \tau)\, \varphi_\beta(Q, \tau)\, dQ\, d\tau. \tag{15}$$

§ 2. – PROPRIÉTÉS DU POTENTIEL DE CHARGE SPATIALE RELATIVEMENT AU PARAMÈTRE.

THÉORÈME 1. – Si les coefficients du système (1) vérifient les conditions (3), (4), (5), dans la région (2), si en outre les composants de la densité $\{\rho_\beta\}$, définis dans la région $[Y \in E, 0 < t \leq T]$, vérifient les inégalités

$$|\rho_\beta(Y, \tau)| < M_\rho t^{-\mu_\rho} \exp[b\,|YX_0|] \tag{16}$$

(où M_ρ, b sont des constantes positives, μ_ρ – une constante non négative, inférieure à l'unité, X_0 est un point fixé dans l'espace E) et sont intégrables dans toute région bornée et mesurable $[Y \in \Omega^* \subset E; 0 < \tau \leq T]$, alors les composants (13) du potentiel de charge spatiale et leurs dérivées d'ordre $m \leq M - 1$ sont définies dans la région $[X \in E, 0 < t \leq T, -R \leq \lambda \leq R]$ et possèdent une régularité de la continuité par rapport au paramètre λ exprimée par les inégalités suivantes

$$|D^{(m)}_X[U^{(\lambda)}_\alpha(X, t)] - D^{(m)}_X[U^{(\lambda')}_\alpha(X, t)]| \tag{16'}$$

$$\leq \text{Const.}\, M_\rho t^{1-\mu_m-\mu_\rho} \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda}$$

($m = 0, 1, \cdots, M-1$), où $\omega_A(\delta)$ désigne le *module de continuité* par rapport à λ des coefficients $A_{\alpha\beta}$, défini pour tout nombre $\delta \geq 0$ par la formule

$$(16'') \qquad \omega_A(\delta) = \max_{\substack{\alpha\beta \\ (k_1, \cdots, k_n)}} \sup_{\substack{|\lambda-\lambda'| \leq \delta \\ x \in E \\ 0 < t < T}} | A_{\alpha\beta}^{k_1 \cdots k_n}(X, t, \lambda) - A_{\alpha\beta}^{k_1 \cdots k_n}(X, t, \lambda') |$$

λ et λ' étant deux nombres arbitraires dans l'intervalle fermé $(-R, R)$, l'exposant h_λ est un nombre positif arbitrairement inférieur au nombre $h_1 = \min(h, Mh')$, la constante μ_m est choisie arbitrairement dans l'intervalle

$$(16''') \qquad m/M < \mu_m < 1\,,$$

le coefficient positif *const* dépend du choix des constantes μ_m et h_λ, mais ne dépend pas des fonctions ρ_β. Nous signalons que le module de continuité $\omega_A(\delta)$ est une fonction non négative non décroissante qui, en vertu de la continuité uniforme admise pour les coefficients $A_{\alpha\beta}$, possède la propriété limite

$$(17) \qquad \lim_{\delta \to 0} \omega_A(\delta) = 0$$

En outre nous signalons que $D_X^{(0)} U_\alpha = U_\alpha$.

Démonstration. – En vertu de la formule (8), on peut écrire les composants du potentiel (13) sous la forme des sommes

$$(18) \qquad U_\alpha^{(\lambda)}(X, t) = \overset{*}{U}{}_\alpha^{(\lambda)}(X, t) + \overset{**}{U}{}_\alpha^{(\lambda)}(X, t)$$

de composants des deux quasi-potentiels

$$(19) \qquad \overset{*}{U}{}_\alpha^{(\lambda)}(X, t) = \int_0^t \iiint_E \sum_{\beta=1}^N W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\, \rho_\beta(Y, \tau)\, dY\, d\tau$$

$$(20) \qquad \overset{**}{U}{}_\alpha^{(\lambda)}(X, t) = \int_0^t \iiint_E \sum_{\beta=1}^N W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Y,\tau}(X, t; Y, \tau)\, \tilde{\rho}_\beta^{(\lambda)}(Y) \tau)\, dY\, d\tau$$

où les composants de la densité correspondant au second quasi-potentiel sont donnés par la formule

$$(21) \qquad \tilde{\rho}_\beta^{(\lambda)}(Y, t) = \int_0^\tau \iiint_E \sum_{\gamma=1}^N \Phi_{\beta\gamma}^{(\lambda)}(Y, \tau; Z, \zeta)\, \rho_\gamma(Z, \zeta)\, dZ\, d\zeta\,.$$

D'après notre travail [3], les éléments de la matrice des quasi-solutions et leurs dérivées vérifient les inégalités suivantes

$$(22) \qquad | D_X^{(m)} [W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Y,\tau}(X, t; Y, \tau)] - D_X^{(m)} [W_{\alpha\beta}^{(\lambda')\,Y,\tau}(X, t; Y, \tau)] |$$

$$\leq \frac{\text{Const}}{(t-\tau)^{\mu'_m}} \frac{\exp[-k|XY|]}{|XY|^{n+m-M\mu'_m}} \max_{\alpha,\beta}^{(k_1+\cdots+k_n=n)} | A_{\alpha\beta}^{k_1 \cdots k_n}(Y, \tau, \lambda) - A_{\alpha\beta}^{k_1 \cdots k_n}(Y, \tau, \lambda') |$$

k est une constante positive *arbitraire*, μ'_m est choisi dans l'intervalle

$$\frac{m}{\mathrm{M}} < \mu'_m < \min\left(1\,,\,\frac{n+m}{\mathrm{M}}\right) \tag{23}$$

$$(m = 0\,,1\,,\cdots,\mathrm{M}-1)\,; \qquad \text{on admet}\quad \mathrm{D}^0\,\mathrm{W}_{\alpha\beta} = \mathrm{W}_{\alpha\beta}\,.$$

Le coefficient positif *const* dépend du choix des constantes k et μ'_m. Remarque faite des inégalités (16) et (21), nous concluons l'existence des dérivées spatiales d'ordre $m \leq \mathrm{M}-1$ des fonctions (19), exprimées par les intégrales absolument convergentes

$$\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(m)}\,[\overset{*}{\mathrm{U}}{}_{\alpha}^{(\lambda)}(\mathrm{X}\,,t)] = \int_0^t \iiint_{\mathrm{E}} \sum_{\beta=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(m)}\,[\mathrm{W}_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}\,,t\,;\mathrm{Y},\tau)]\,\rho_\beta(\mathrm{Y},\tau)\,d\mathrm{Y}\,d\tau \tag{24}$$

dans la région $[\mathrm{X}\in\mathrm{E}\,,0<t<\mathrm{T}]$. Ensuite, en vertu des inégalités (16) et (22), on conclut que les différences des fonctions (19) et des leurs dérivées d'ordre $m \leq \mathrm{M}-1$ vérifient les inégalités $(k > b)$

$$\begin{aligned} &\left|\,\mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(m)}\,[\overset{*}{\mathrm{U}}{}_{\alpha}^{(\lambda)}(\mathrm{X}\,,t)] - \mathrm{D}_{\mathrm{X}}^{(m)}\,[\mathrm{U}_{\alpha}^{(\lambda')}(\mathrm{X}\,,t)]\,\right| \\ &\leq \mathrm{Const}\,\mathrm{M}_\varrho \sup_{\substack{\mathrm{Y}\in\mathrm{E}\\ 0<\tau<\mathrm{T}}} \left|\,\mathrm{A}_{\alpha\beta}^{k_1\cdots k_n}(\mathrm{Y}\,,\tau\,,\lambda) - \mathrm{A}_{\alpha\beta}^{k_1\cdots k_n}(\mathrm{Y}\,,\tau\,,\lambda')\,\right| \\ &\quad\cdot \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu_m}\tau^{\mu_\varrho}} \iiint_{\mathrm{E}} \frac{e^{-k\,|\mathrm{XY}|+b\,|\mathrm{YX}_0|}\,d\mathrm{Y}}{|\mathrm{XY}|^{n+m-\mathrm{M}\mu_m}} \\ &\leq \mathrm{Const}\,\mathrm{M}_\varrho\,t^{1-\mu_m-\mu_\varrho}\exp\,[b\,|\mathrm{XX}_0|]\;\omega_{\mathrm{A}}\,(|\lambda-\lambda'|)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Pour étudier le second composant (20), nous ferons d'abord l'analyse de la densité exprimée pa la formule (21). Remarquons donc, en vertu des équations intégrales (12), que les différences des fonctions $\Phi_{\alpha\beta}$, correspondant aux valeurs λ et λ', vérifient le système d'équations intégrales

$$\begin{aligned} &\Phi_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(\mathrm{X}\,,t\,;\mathrm{Y}\,,\tau) - \Phi_{\alpha\beta}^{(\lambda')}(\mathrm{X}\,,t\,;\mathrm{Y}\,,\tau) = \mathrm{L}_{\alpha\beta}^{\lambda,\lambda'}(\mathrm{X}\,,t\,;\mathrm{Y}\,,\tau) \\ &+ \int_\tau^t \iiint_{\mathrm{E}} \sum_{\gamma=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{N}_{\alpha\gamma}^{(\lambda')}(\mathrm{X}\,,t\,;\mathrm{Z}\,,\zeta)\,[\Phi_{\gamma\beta}^{(\lambda)}(\mathrm{Z}\,,\zeta\,;\mathrm{Y}\,,\tau) - \Phi_{\gamma\beta}^{(\lambda')}(\mathrm{Z}\,,\zeta\,;\mathrm{Y}\,,\tau)]\,d\mathrm{Z}\,d\zeta \end{aligned} \tag{26}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(\mathrm{X}\,,t\,;\mathrm{Y}\,,\tau) = \hat{\Psi}_{(j)\,(\mathrm{X},t)}^{(\alpha)}\,[\mathrm{W}_{(j)\,\beta}^{(\lambda)\,\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}\,,t\,;\mathrm{Y}\,,\tau)] = \\ &\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=\mathrm{M}\\ 1\leq j\leq \mathrm{N}}} [\mathrm{A}_{\alpha j}^{k_1\cdots k_n}(\mathrm{X}\,,t\,,\lambda) - \mathrm{A}_{\alpha j}^{k_1\cdots k_n}(\mathrm{Y}\,,\tau\,,\lambda)]\,\frac{\partial^{\mathrm{M}}\,\mathrm{W}_{j}^{(\lambda)\,\mathrm{Y},\tau}(\mathrm{X}\,,t\,;\mathrm{Y}\,,\tau)}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}} \\ &+ \sum_{\substack{0\leq k_1+\cdots+k_n<\mathrm{M}\\ 1\leq j\leq \mathrm{N}}} \mathrm{A}_{\alpha j}^{k_1\cdots k_n}(\mathrm{X}\,,t\,,\lambda)\,\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}}\,[\mathrm{W}_{j\beta}^{(\lambda)\,\mathrm{Z},\zeta}(\mathrm{X}\,,t\,;\mathrm{Z}\,,\zeta)] \end{aligned} \tag{27}$$

$$(28)\qquad L_{\alpha\beta}^{\lambda,\lambda'}(X,t;Y,\tau)=[N_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X,t;Y,\tau)-N_{\alpha\beta}^{(\lambda')}(X,t;Y,\tau)]$$

$$+\int_{\tau}^{t}\iiint_{E}\sum_{\gamma=1}^{N}[N_{\alpha\gamma}^{(\lambda)}(X,t:Z,\zeta)-N_{\alpha\gamma}^{(\lambda')}(X,t;Z,\zeta)]\,\Phi_{\gamma\beta}^{(\lambda)}(Z,\zeta:Y,\tau)$$

D'après notre travail [3], les noyaux des équations (27) vérifient une limitation à singularités faibles

$$(29)\qquad |N_{\alpha\gamma}^{(\lambda)}(X,t;Z,\zeta)|\leq\frac{\mathrm{Const}}{(t-\zeta)^{\mu^*}}\,\frac{\exp[-k\,|XY|]}{|XZ|^{n+M(1-\mu^*)-h_1}}$$

la constante μ^* étant choisie arbitrairement dans l'intervalle

$$(30)\qquad 1-\frac{h_1}{M}<\mu^*<1\quad;\quad h_1=\min(h\,,\,Mh').$$

Il en résulte que les différences (26) s'expriment par les formules connues de Volterra

$$(31)\qquad \Phi_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X,t:Y,\tau)-\Phi_{\alpha\beta}^{(\lambda')}(X,t:Y,\tau)=L_{\alpha\beta}^{\lambda,\lambda'}(X,t;Y,\tau)$$

$$+\int_{\tau}^{t}\iiint_{E}\sum_{\gamma=1}^{N}\mathfrak{N}_{\alpha\gamma}^{(\lambda')}(X,t:Z,\zeta)\,L_{\gamma\beta}^{\lambda,\lambda'}(Z,\zeta;Y,\tau)\,dZ\,d\zeta$$

(β est fixé) où les noyaux résolvants sont les sommes de séries absolument convergentes

$$(32)\qquad \mathfrak{N}_{\alpha\gamma}^{(\lambda)}(X,t:Z,\zeta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}N_{\alpha\gamma}^{(\lambda)\nu}(X,t:Z,\zeta)$$

($N_{\alpha\gamma}^{0}=N_{\alpha\gamma}$), les noyaux itérés étant déterminés par les relations de récurrence

$$(33)\qquad N_{\alpha\gamma}^{(\lambda)(\nu+1)}(X,t;Z,\zeta)=$$

$$\sum_{\delta=1}^{N}\int_{0}^{t}\iiint_{E}N_{\alpha\delta}^{(\lambda)}(X,t;\Pi,s)\,N_{\delta\gamma}^{(\lambda)(\nu)}(\Pi,s;Z,\zeta)\,d\Pi\,ds.$$

Les noyaux résolvants (32) vérifient aussi la limitation de la forme (29).

Pour déterminer une limitation des différences (31), cherchons d'abord la limitation des différences (28). Remarquons donc qu'en vertu des inégalités (22) nous aurons les limitations de la forme

$$(34)\qquad |N_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X,t;Y,\tau)-N_{\alpha\beta}^{(\lambda')}(X,t;Y,\tau)|$$

$$\leq\frac{\mathrm{Const}}{(t-\tau)^{\mu}}\,\frac{\exp[-k\,|XY|]}{|XY|^{n+M(1-\mu)}}\,\omega_A(|\lambda-\lambda'|)$$

($0<\mu<1$) contenant explicitement le facteur ω_A mais ayant une singularité forte spatiale. Or, en s'appuyant sur les inégalités (29), nous pouvons abaisser les exposants de la limitation (34) pour obtenir une nouvelle limitation des différences (34) qui contenait à la fois le facteur $\omega_A(|\lambda-\lambda'|)$ et une limitation spatiale faible.

En effet, si $\omega_A(|\lambda - \lambda'|) \geq |XY|$, alors de l'inégalité (29), vraie quel que soit λ dans l'intervalle $(-R, +R)$, il résulte l'inégalité

$$(35) \qquad |N_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X, t : Y, \tau) - N_{\alpha\beta}^{(\lambda')}(X, t ; Y, \tau)|$$
$$\leq \frac{\text{Const}}{(t-\tau)^{\mu^*}} \frac{\exp[-k|XY|]}{|XY|^{n+M(1-\mu^*)-h_1+h_0}} [\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_0}$$

h_0 étant une constante positive inférieure à la différence $h_1 - M(1 - \mu^*)$. Dans le cas $\omega_A(|\lambda - \lambda'|) < |XY|$, la limitation (34) conduit à l'inégalité

$$(36) \qquad |N_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X, t ; Y, \tau) - N_{\alpha\beta}^{(\lambda')}(X, t ; Y, \tau)|$$
$$\leq \frac{\text{Const}}{(t-\tau)^{\mu}} \frac{\exp[-k|XY|]}{|XY|^{n+M(1-\mu)-h_0}} [\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{1-h'_0}$$

h'_0 étant un nombre positif arbitraire inférieur à l'unité. En s'appuyant sur les inégalités (35) et (36), nous concluons une limitation à singularités faibles, contenant le facteur $\omega_A(|\lambda - \lambda'|)$,

$$(37) \qquad |N_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X, t ; Y, \tau) - N_{\alpha\beta}^{(\lambda')}(X, t ; Y, \tau)|$$
$$\leq \frac{\text{Const}}{(t-\tau)^{\tilde{\mu}}} \frac{\exp[-k|XY|]}{|XY|^{n+M(1-\tilde{\mu})-h_1+h_\lambda}} [\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda}$$

où h_λ est une constante positive, fixée arbitrairement dans l'intervalle

$$(38) \qquad 0 < h_\lambda < h_1 = \min(h, Mh');$$

la constante $\tilde{\mu}$ est fixée ensuite arbitrairement dans l'intervalle

$$(39) \qquad 1 - \frac{h_1 - h_\lambda}{M} < \tilde{\mu} < 1.$$

Nous rappelons que la constante positive k est arbitraire et que le facteur positif *const* dépend du choix des constantes h_λ, $\tilde{\mu}$, k.

La limitation trouvée (37) et l'inégalité

$$(40) \qquad |\Phi_{\gamma\beta}^{(\lambda)}(Z, \zeta ; Y, \tau)| \leq \frac{\text{Const}}{(\zeta-\tau)^{\mu^*}} \frac{\exp[-k|YZ|]}{|YZ|^{n+M(1-\mu^*)-h_1}}$$

de la même forme que (29), donnent une limitation pour la fonction (28)

$$(41) \qquad |L_{\alpha\beta}^{\lambda,\lambda'}(X, t ; Y, \tau)| \leq \frac{\text{Const}}{(t-\tau)^{\tilde{\mu}}} \frac{\exp[-k|XY|]}{|XY|^{n+M(1-\mu)-h+h_\lambda}} [\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda}$$

de la même forme que (37). Nous en concluons pour la différence (31) une limitation aussi de même forme

$$(42) \qquad |\Phi_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(X, t ; Y, \tau) - \Phi_{\alpha\beta}^{(\lambda')}(X, t ; Y, \tau)|$$
$$\leq \frac{\text{Const}}{(t-\tau)^{\tilde{\mu}}} \frac{\exp[-k|XY|]}{|XY|^{n+M(1-\tilde{\mu})-h+h'_\lambda}} [\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda}$$

et ensuite, en tenant compte de l'hypothèse (16), on obtient pour les composants de la densité (21) une limitation

$$|\tilde{\rho}_\beta^{(\lambda)}(Y, \tau) - \tilde{\rho}_\beta^{(\lambda')}(Y, \tau)| \leq \frac{\text{Const } M_\varrho}{\tau^{\tilde{\mu}+\mu_\varrho-1}} \exp[b\,|YX_0|]\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda} . \tag{43}$$

La limitation obtenue et l'inégalité (22) fournit pour la différence des valeurs (20) et leurs dérivées ($0 \leq m \leq M - 1$)

$$D_X^{(m)}[\overset{**}{U}{}_\alpha^{(\lambda)}(X, t)] - D_X^{(m)}[\overset{**}{U}{}_\alpha^{(\lambda')}(X, t)] = \tag{44}$$

$$\int_0^t \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} \{D_X^{(m)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda)\,Y,\tau}(X, t; Y, \tau)] - D_X^{(m)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda')\,Y,\tau}(X, t; Y, \tau)]\}\,\tilde{\rho}_\beta^{(\lambda)}(Y,\tau)\,dY\,d\tau$$

$$+ \int_0^t \iiint_E \sum_{\beta=1}^{N} D_X^{(m)}[W_{\alpha\beta}^{(\lambda')\,Y,\tau}(X, t; Y, \tau)]\,[\tilde{\rho}_\beta^{(\lambda)}(Y, \tau) - \tilde{\rho}_\beta^{(\lambda')}(Y, \tau)]\,dY\,d\tau$$

une limitation suivante

$$|D_X^{(m)}[\overset{**}{U}{}^{(\lambda)}(X, t)] - D_X^{(m)}[\overset{**}{U}{}^{(\lambda')}(X, t)]| \tag{45}$$

$$\leq \text{Const } M_\varrho\, t^{1-\mu_m-\mu_\varrho} \exp[b\,|XX_0|]\,[\omega_A(|\lambda - \lambda'|)]^{h_\lambda} .$$

En rapprochant les résultats (25) et (45), on arrive à la conclusion (16′) du notre théorème 1.