Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domenico Caligo

Calcolo del minimo autovalore relativo ad una equazione della conduzione del calore in un fluido soggetto a turbolenza

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 884–890.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_884_0¿

Analisi numerica. — *Calcolo del minimo autovalore relativo ad una equazione della conduzione del calore in un fluido soggetto a turbolenza* (*). Nota di DOMENICO CALIGO, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. La determinazione degli autovalori λ per l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^7)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda x^7 y=0, \tag{1}$$

ai quali corrispondono soluzioni della (1) soddisfacenti le due condizioni

$$\begin{cases} y(x) & \text{limitata in } [0,1] \\ y(0)=0, & \end{cases} \tag{2}$$

ha suscitato l'interesse di diversi Autori (H. Latzko [1], Wm. H. Durfee [2], H. E. Fettis [3]) (1).

Essi hanno effettuato, per vie diverse, con procedimenti caratteristici dell'Analisi numerica, il calcolo degli autovalori del sistema (1)-(2); ma nessuno si è occupato di provare la loro esistenza. I procedimenti adottati non consentivano neppure di precisare se i valori numerici forniti fossero approssimazioni per difetto o per eccesso.

2. G. Sansone, ha ripreso recentemente lo studio della questione ed in una sua Nota [4] ha dimostrato l'esistenza di infiniti autovalori, tutti positivi, per equazioni più generali della (1). Egli si è proposto il seguente problema:

«Si consideri l'equazione

$$\frac{d}{dx}\left[\vartheta(x)\frac{dy}{dx}\right]+\lambda A(x)\,y=0 \tag{3}$$

dove $\vartheta(x)$, $\vartheta'(x)$, $A(x)$ sono funzioni continue in $[0,1]$,

$$\vartheta(x)>0 \text{ per } 0\leq x<1;\ \vartheta(1)=0,\ \lim_{x\to 1-0}\vartheta(x)/(1-x)=\rho>0;$$

$$A(x)>0 \text{ per } 0<x\leq 1,$$

(*) Lavoro eseguito all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, nell'ambito delle attività del gruppo di ricerca n. 6 (1961-62) del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 giugno 1962.

(1) Con la numerazione in [ ] si rinvia ai riferimenti bibliografici.

e si cerchino gli autovalori di λ cui corrispondano le autofunzioni $y(x)$ definite in $[0, 1]$ che soddisfino le condizioni:

(4_1) $y(x)$ sia limitata in $[0, 1]$,

(4_2) $y(0) = 0$,

(4_3) $y(x)$ verifichi l'equazione (3) per $0 \leq x < 1$ ».

Definita, per $0 \leq \tau \leq 1$, la funzione

$$(5_1) \qquad \omega(\tau) = \int_0^\tau \frac{ds}{\vartheta(s)}, \qquad [\omega(1) = \infty],$$

(per la quale risulta

$$(5_2) \qquad \lim_{\tau \to 1-0} \omega(\tau)/\log(1-\tau) = -\rho^{-1}) .$$

il prof. Sansone ha dimostrato che, « se λ è un autovalore dell'equazione (3) e $y(x)$ la corrispondente autofunzione, allora $y(x)$ soddisfa l'equazione integrale di seconda specie di Fredholm

$$(6) \qquad y(x) = \lambda \int_0^1 \mathcal{K}(x, \tau) A(\tau) y(\tau) d\tau$$

col nucleo $\mathcal{K}(x, \tau) A(\tau)$ di Schmidt-Goursat », ove è stato posto

$$(7_1) \qquad \mathcal{K}(x, \tau) = \omega(\tau) \quad , \quad x \geq \tau, (1 \geq x \geq \tau \geq 0),$$

$$(7_2) \qquad \mathcal{K}(x, \tau) = \omega(x) \quad , \quad x \leq \tau, (1 \geq \tau \geq x \geq 0).$$

L'osservazione che il nucleo $\mathcal{K}(x, \tau) A(\tau)$ è di quadrato sommabile (come segue da (7_1), (7_2) e (5_2)) per τ variabile in $[0, 1]$, per x variabile in $[0, 1]$, per (x, τ) variabile nel quadrato di punti estremi $(0, 0)$, $(1, 1)$, consente di dedurre l'esistenza di infiniti autovalori perché il nucleo simmetrico $\mathcal{K}(x, \tau) [A(x) A(\tau)]^{1/2}$ non è elementare [5]. Gli autovalori sono tutti positivi [4].

3. Nel presente lavoro, su proposta del prof. Giovanni Sansone, forniamo una valutazione numerica del minimo autovalore relativo al sistema (1)-(2) ricorrendo a due teoremi di M. Picone ([5], pp. 607-610 e [6]), che, per il nostro scopo, possono essere riuniti in un solo enunciato:

Sia

$$(8) \qquad K(x, \tau) \equiv \mathcal{K}(x, \tau) [A(x) A(\tau)]^{1/2}$$

il nucleo simmetrico sopra menzionato e siano

$$K_n(x, \tau) = \int_0^1 K_{n-1}(x, s) K_0(s, \tau) ds, \qquad (K_0 \equiv K)$$

i nuclei iterati e

$$\mathrm{NK}_n = \int_0^1\int_0^1 \mathrm{K}_n^2(x\,,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad (n \geq 0)$$

le loro norme integrali; se λ_0 è il minimo autovalore dell'equazione integrale (6), corrispondente al sistema (4_1)–(4_3), sussistono le seguenti relazioni

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{NK}_n)^{-\frac{1}{n+1}} = \lambda_0^2\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{NK}_n}{\mathrm{NK}_{n+1}} = \lambda_0^2\,;$$

i termini della successione $(\mathrm{NK}_n)^{-1/(n+1)}$ forniscono valori per difetto di λ_0^2, quelli della successione (decrescente) $\mathrm{NK}_n/\mathrm{NK}_{n+1}$ valori per eccesso di λ_0^2; perciò

$$\frac{1}{(\mathrm{NK}_n)^{\frac{1}{2(n+1)}}} \leq \lambda_0 < \left(\frac{\mathrm{NK}_\nu}{\mathrm{NK}_{\nu+1}}\right)^{1/2} \tag{9}$$

quali che siano n e ν nulli o interi e positivi.

4. L'equazione (1) è stata ricavata da H. Latzko in una sua ricerca [1] sulla conduzione del calore in un fluido soggetto a turbolenza; la temperatura del fluido è una funzione $\Theta(\rho\,,z)$ della distanza ρ dall'asse z $(0 \leq \rho \leq r)$ e della coordinata z nella direzione del flusso di corrente. Con la consueta trasformazione $\Theta(\rho\,,z) = y(\rho)\exp(-kz)$ e con il cambiamento di variabile $x = \{1 - (\rho/r)^2\}^{1/7}$ si passa dall'equazione alle derivate parziali, di secondo ordine, nella funzione incognita Θ, alla equazione (1) nella $y(x)$, ove $\lambda = 49\,k\mathrm{H}\,(r/2)^{8/7}$ è proporzionale al parametro k ed alla quantità H, legata al raggio r ed alla velocità massima nella direzione della corrente (2).

Il confronto con la (3) mostra he

$$\vartheta(x) \equiv 1 - x^7 \quad , \quad \mathrm{A}(x) \equiv x^7\,; \tag{10}$$

sono perciò soddisfatte le ipotesi di G. Sansone. Le posizioni (5_1) e (8) corrispondono alle

$$\omega(\tau) = \int_0^\tau \frac{\mathrm{d}s}{1 - s^7}\,, \tag{11}$$

$$\mathrm{K}(x\,,\tau) = x^{7/2}\,\tau^{7/2} \begin{cases} \displaystyle\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}s}{1-s^7}\,, & x \geq \tau \\[2ex] \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{1-s^7}\,, & x \leq \tau\,. \end{cases} \tag{12}$$

(2) Rileviamo, per inciso, che, nella relazione fra λ e k, la [1] porta scritto erroneamente, nella formula (12 a), 4 anziché 49.

Le difficoltà della ricerca consistono praticamente nel calcolo degli integrali, che intervengono nelle espressioni dei nuclei iterati e delle loro norme integrali; le già ricordate proprietà di integrabilità e di simmetria del nucleo (12) consentono di semplificare i calcoli, per i quali si è fatto ricorso ad operazioni sopra serie.

Tenendo conto degli sviluppi in serie di $(1-s^7)^{-1}$ e di

$$\tau^7\left[\int_0^\tau ds/(1-s^7)\right]^2$$

si ottiene facilmente

$$(13)\quad NK_0 = 2\int_0^1 x^7 dx\int_0^x \tau^7\left[\int_0^\tau \frac{ds}{1-s^7}\right]^2 d\tau = 4\sum_0^\infty{}_r \frac{1}{7r+2}\,\frac{1}{7r+10}\,\frac{1}{7r+18}\left(\sum_0^r{}_h \frac{1}{7h+1}\right).$$

La (13), malgrado la sua concisione, male si presta però al calcolo numerico di NK_0 sia perché è lentamente convergente [3] sia perché non è agevole apprezzare convenientemente il resto. Abbiamo trasformato la (13) mediante la funzione digamma $\Psi(x) = \frac{d}{dx}\log\Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ e le sue derivate rispetto ad x. Si è ottenuto [4]

$$(14)\quad NK_0 = \frac{1}{80} + \frac{1}{32}\left\{-\frac{17}{210}\Psi\left(1+\frac{1}{7}\right) - \frac{9}{56}\Psi\left(1+\frac{2}{7}\right) + \frac{13}{28}\Psi\left(1+\frac{3}{7}\right)\right.$$

$$\left. -\frac{187}{840}\Psi\left(1+\frac{4}{7}\right) + \frac{1}{7}\sum_2^\infty{}_h \frac{1}{7h+1}\left[-\Psi\left(h+\frac{2}{7}\right) + 2\Psi\left(h+\frac{3}{7}\right) - \Psi\left(h+\frac{4}{7}\right)\right]\right\};$$

ivi è (per $h = 2, 3, \cdots$)

$$(15)\quad -\Psi(h+2/7) + 2\Psi(h+3/7) - \Psi(h+4/7) =$$

$$\frac{14}{(7h)^3}\sum_0^{h-1}{}_k\sum_1^\infty{}_s \frac{1}{\left(s+\dfrac{7k+2}{7h}\right)\left(s+\dfrac{7k+3}{7h}\right)\left(s+\dfrac{7k+4}{7h}\right)} > 0.$$

(3) Mediante la calcolatrice elettronica FINAC sono state calcolate dalla dott.ssa N. Cotugno le ridotte $NK_0^{(n)}$ della somma (13) arrestata ad $r = n$, con $0 \le n \le 100$. I valori crescono (la serie è a termini positivi) da $NK_0^{(0)} = 1/90$; si ha per esempio: $NK_0^{(50)} = 0{,}01317583$; $NK_0^{(75)} = 0{,}01317776$; $NK_0^{(100)} = 0{,}01317848$.

(4) Si scrive la (13) nella forma

$$NK_0 = 4\sum_0^\infty{}_h \frac{1}{7h+1}\cdot\sum_h^\infty{}_r \frac{1}{(7r+2)(7r+10)(7r+18)}$$

e, decomposta

$$\frac{1}{(7r+2)(7r+10)(7r+18)}$$

nella somma di tre frazioni elementari, si sfruttano le seguenti proprietà di $\Psi(x)$:

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x},\quad \sum_0^m{}_n \frac{1}{p+qn} = \frac{1}{q}\left[\Psi\left(1+m+\frac{p}{q}\right) - \Psi\left(\frac{p}{q}\right)\right].$$

La (14), in virtù delle (15) e di note proprietà della $\Psi(x)$, consente di dare per NK_0 delle limitazioni che sono molto utili per il calcolo numerico: si associano ai primi quattro termini entro $\{\cdots\}$ i primi m dello sviluppo in serie [5] si ottiene così un valore per difetto di NK_0. Per avere un valore per eccesso si tiene conto delle (15) e si ricava (per $m \geq 0$):

$$(16)\qquad \frac{1}{32}\,\frac{1}{7}\sum_{m+2}^{\infty}{}_h\,\frac{1}{7h+1}\left[-\Psi\left(h+\frac{2}{7}\right)+2\,\Psi\left(h+\frac{3}{7}\right)-\Psi\left(h+\frac{4}{7}\right)\right]=$$

$$\frac{1}{14^4}\sum_{m+2}^{\infty}{}_h\,\frac{1}{h^3\left(h+\frac{1}{7}\right)}\sum_{0}^{h-1}{}_k\sum_{1}^{\infty}{}_s\,\frac{1}{\left(s+\frac{7k+2}{7h}\right)\left(s+\frac{7k+3}{7h}\right)\left(s+\frac{7k+4}{7h}\right)}$$

$$<\frac{1}{14^4}\sum_{m+2}^{\infty}{}_h\,\frac{1}{h^3}\cdot\sum_{1}^{\infty}{}_s\,\frac{1}{s^3}=\frac{1}{14^4}\left[\sum_{1}^{\infty}{}_h\,\frac{1}{h^3}-\sum_{1}^{m+1}{}_h\,\frac{1}{h^3}\right]\left[\sum_{1}^{\infty}{}_s\,\frac{1}{s^3}\right],$$

ove l'ultimo membro si valuta facilmente, perché (cfr. [7], I, 280)

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n\,\frac{1}{n^3}=-\frac{1}{2}\Psi''(1)=1{,}202056903159.$$

Perciò, posto

$$(17)\qquad (NK_0)_m=\frac{1}{80}+\frac{1}{32}\left\{-\frac{17}{210}\Psi\left(1+\frac{1}{7}\right)-\frac{9}{56}\Psi\left(1+\frac{2}{7}\right)+\frac{13}{28}\Psi\left(1+\frac{3}{7}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{187}{840}\Psi\left(1+\frac{4}{7}\right)+\frac{1}{7}\sum_{2}^{m+1}{}_h\,\frac{1}{7h+1}\left[-\Psi\left(h+\frac{2}{7}\right)+2\,\Psi\left(h+\frac{3}{7}\right)-\Psi\left(h+\frac{4}{7}\right)\right]\right\},$$

si ha

$$(18)\qquad (NK_0)_m<NK_0<(NK_0)_m+\frac{1}{38416}\left[-\frac{1}{2}\Psi''(1)\right]\left[-\frac{1}{2}\Psi''(1)-\sum_{1}^{m+1}{}_h\,\frac{1}{h^3}\right].$$

Iterando il procedimento, che ha condotto alla (13), e ponendo

$$(19)\qquad c_h^{(i)}=\sum_{0}^{h}{}_l\,\frac{1}{7(l-1)+8i}=\frac{1}{7}\left[\Psi\left(\frac{8}{7}i+h\right)-\Psi\left(\frac{8}{7}i-1\right)\right],$$
$$(i=1\,,2\,,3\,,\cdots)$$

$$(20)\qquad c_{h,1}=c_h'-c_h''=1-\frac{1}{7}\left[\Psi\left(1+\frac{1}{7}\right)-\Psi\left(1+\frac{2}{7}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{7}\left[\Psi\left(h+1+\frac{1}{7}\right)-\Psi\left(h+2+\frac{2}{7}\right)\right](>0),$$

(5) Per un più comodo uso di tabelle esistenti, come ad esempio quelle del DAVIS [7] o della B.A.A.S. [8] è consigliabile ridursi alle

$$\Psi\left(1+\frac{1}{7}\right)\ ,\quad \Psi\left(1+\frac{2}{7}\right)\ ,\quad \Psi\left(1+\frac{3}{7}\right)\ ,\quad \Psi\left(1+\frac{4}{7}\right);$$

Con la formula di interpolazione di Newton–Bessel del sesto ordine si è ottenuto:

$$\Psi\left(1+\frac{1}{7}\right)=-0{,}363980\ 24222\ \ ;\quad \Psi\left(1+\frac{2}{7}\right)=-0{,}185517\ 98028$$

$$\Psi\left(1+\frac{3}{7}\right)=-0{,}032485\ 42396\ \ :\quad \Psi\left(1+\frac{4}{7}\right)=+0{,}101229\ 26507\,.$$

si ricava la seguente espressione di NK_1:

$$NK_1 = \frac{1}{14^4} \sum_{0}^{\infty}{}_h (A_h - B_h) , \tag{21}$$

ove

$$\left\{\begin{aligned}
A_h = {} & \frac{2}{(h+12/7)(h+20/7)(h+4)} \sum_{0}^{h}{}_r c'_r c'_{h-r} \left[\frac{h+16/7}{h+4/7} \left(\frac{2}{r+2/7} - \frac{2}{r+10/7} \right) \right. \\
& \left. + \frac{h+4}{h+4/7} \left(\frac{1}{h-r+2/7} - \frac{1}{h-r+10/7} \right) \right] \\
& + \frac{1}{(h+20/7)(h+4)(h+36/7)} \sum_{0}^{h}{}_r c_{r,1}\, c_{h-r,1} \frac{1}{r+10/7} , \\
B_h = {} & \frac{1}{(h+20/7)(h+4)(h+36/7)} \sum_{0}^{h}{}_r \left[\left(\frac{h+24/7}{h+12/7} \left(\frac{2}{r+11/7} - \frac{2}{r+19/7} \right) \right. \right. \\
& \left. + \frac{h+36/7}{h+12/7} \left(\frac{1}{h-r+1/7} - \frac{1}{h-r+9/7} \right) \right) \sum_{0}^{r}{}_\varrho \left(\frac{c_{\varrho,1}}{7\varrho+10} + \frac{c_{r-\varrho,1}}{7\varrho+1} \right) \\
& + 2\, c'_r c''_{h-r} \left(\frac{h+24/7}{h+12/7} \left(\frac{2}{r+2/7} - \frac{2}{r+10/7} \right) \right. \\
& \left. \left. + \frac{h+36/7}{h+12/7} \left(\frac{1}{h-r+10/7} - \frac{1}{h-r+18/7} \right) \right) \right] .
\end{aligned}\right. \tag{22}$$

ed è $A_h > B_h > 0$.

Nella (9) occorrono solo i valori per eccesso di NK_0; di NK_n, per $n \geq 1$, servono invece nella stessa (9) i valori per eccesso, al primo membro e al numeratore del terzo membro, e i valori per difetto al denominatore del terzo membro.

Valori per eccesso di NK_0 si ottengono dalla (18); il calcolo di ridotte della serie (21) fornisce valori per difetto di NK_1.

Mediante la calcolatrice elettronica FINAC sono stati sommati i primi 101 termini della (21) con un programma preparato dalla dott.ssa N. Cotugno e si è ottenuto 0,000172348 con stabilità fino alla ottava cifra decimale.

Si assumono pertanto i valori

$$NK_0 = 0{,}0131797 \qquad \text{(per eccesso con errore} < 3 \cdot 10^{-7})$$

$$0{,}000172348 < NK_1 < 0{,}000172360$$

e si ricava dalla (9)

$$8{,}7275 < \lambda_0 < 8{,}7448 .$$

I risultati degli Autori citati sono [1] $\lambda_0 = 8{,}712$, [2] $\lambda_0 = 8{,}72747$, [3] $\lambda_0 = 8{,}72798$.

Dedicheremo una Nota successiva alla assai più laboriosa determinazione dei successivi autovalori, basata sopra limitazioni dovute a M. Picone ([2], pp. 607–610) e L. De Vito [9].

Riferimenti bibliografici.

[1] H. Latzko, *Wärmeübergang an einem turbolenten Flüssigkeits – oder Gasstrom*, « Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. », *1*, 268–290 (1921).

[2] Wm. H. Durfee, *Heat Flow in a Fluid with Eddying Flow* (Readers Forum), « Journ. of the Aeronautical (ora: " Aero–Space ") Sciences », *23*, 188–189 (1956).

[3] H. E. Fettis, *On the eigenvalue Latzko's differential equation*, « Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. », *37*, 398–399 (1957).

[4] G. Sansone, *Sugli autovalori relativi ad una equazione della conduzione del calore in un fluido soggetto a turbolenza*, « Annali di Mat. pura e appl. » (IV), LIII, 5–8 (1961).

[5] M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore* (Rondinella, Napoli 1940), 616–617 (teor. XXXIII).

[6] M. Picone, *Sullo spettro in un parametro da cui dipendono certe equazioni integrali lineari*, questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XXIII, 347–354 (1957).

[7] H. T. Davis, *Tables of the higher Mathematical Functions* (Principia Press, Bloomington Indiana, 1933–35), due volumi.

[8] B.A.A.S., *Mathematical Tables*, Londra 1931, I, 42.

[9] L. De Vito, *Sul calcolo approssimato degli autovalori delle trasformazioni compatte e delle relative molteplicità*, questi « Rendiconti », ser. VIII, vol. XXX, 351–356 e 452–459 (1961).