Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jacques Louis Lions, Enrico Magenes

Remarques sur les problèmes aux limites linéaires elliptiques

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 873–883.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_873_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi matematica. — *Remarques sur les problèmes aux limites linéaires elliptiques.* Nota di JACQUES LOUIS LIONS et ENRICO MAGENES, presentata [*] dal Corrisp. C. MIRANDA.

Dans une série de travaux en collaboration [3] [1] nous avons dévéloppé une théorie des problèmes aux limites linéaires elliptiques non homogènes dans les espaces $W^{s,p}$ de Sobolev, en cherchant surtout à généraliser les données aux limites. Le but de cette Note est de généraliser aussi le deuxième membre f de l'équation $Au = f$ que l'on considère, tout en restant dans le cadre des espaces L^p.

1. Soit Ω un ouvert borné de R^n; et soit $E(\Omega)$ un espace vectoriel topologique localement convexe separé de distributions sur Ω qui contient l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ (des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω muni de la topologie habituelle de L. Schwartz [12]), l'injection de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $E(\Omega)$ étant continue; on suppose que $\mathcal{D}(\Omega)$ *n'est pas dense dans* $E(\Omega)$. On désigne par A un opérateur linéaire tel que

(1.1) A *soit un isomorphisme (algébrique et topologique) de* $E(\Omega)$ *sur* $L^p(\Omega)$

(p réel > 1, $L^p(\Omega)$ espace des fonctions de puissance p–ème sommable dans Ω muni de la norme habituelle). On a alors par *transposition* que l'adjoint A^* de A est un isomorphisme de $L^{p'}(\Omega)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$ sur $E'(\Omega)$ (espace dual de $E(\Omega)$), c'est à dire: pour tout $L \in E'(\Omega)$ il existe u unique dans $L^{p'}(\Omega)$ telle que $A^* u = L$, i.e.

$$(u, Av) = \langle L, \bar{v} \rangle \qquad \forall v \in E(\Omega) \tag{1.2}$$

où l'on pose $(\varphi, \psi) = \int_\Omega \varphi(x) \overline{\psi(x)}\, dx$ et $\langle , \rangle$ désigne la dualité entre $E(\Omega)$ et $E'(\Omega)$; en outre u depend continûment de L.

Soit maintenant $K_i(\Omega)$ ($i = 1, \cdots, r$, r fini) un espace vectoriel topologique localement convexe separé de distributions sur Ω tel que

(1.3) $E(\Omega) \subset K_i(\Omega)$ *l'injection de* $E(\Omega)$ *dans* $K_i(\Omega)$ *étant continue*;

(1.4) $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $K_i(\Omega)$

(c'est à dire $K_i(\Omega)$ est un espace normal de distributions).

(*) Nella seduta del 12 giugno 1962.

(1) Nous désirons remercier ici le C.N.R. italien (gruppi n. 9 e 12 del Comitato Naz. per la Matematica), les Relations Culturelles franco–italiennes, les Universités de Nancy et de Pavia qui nous ont permis cette collaboration.

On peut alors identifier le dual $K'_i(\Omega)$ de $K_i(\Omega)$ avec un espace de distributions sur Ω de façon que, $\mathcal{D}'(\Omega)$ étant l'espace des distributions, on a

$$(1.5) \qquad K'_i(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{et} \quad K'_i(\Omega) \subset E'(\Omega) \quad \text{(injections continues).}$$

Alors pour i fixé et pour tout $k'_i \in K'_i(\Omega)$ il existe u_i unique dans $L^{p'}(\Omega)$ telle que $A^* u_i = k'_i$.

On peut maintenant définir la «somme» $K'_1(\Omega) + \cdots + K'_r(\Omega)$ des $K'_i(\Omega)$ comme suit: on considère l'application $(k'_1, k'_2, \cdots, k'_r) \longrightarrow k'_1 + k'_2 + \cdots + k'_r$ de $K'_1(\Omega) \times K'_2(\Omega) \times \cdots \times K'_r(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et on désigne par Z le noyau de cette application: $Z = \{(k'_1, \cdots, k'_r) : k'_1 + \cdots + k'_r = 0\}$; Z étant fermé, on pose alors par définition

$$(1.6) \qquad K'_1(\Omega) + \cdots + K'_r(\Omega) = (K'_1(\Omega) \times \cdots \times K'_r(\Omega))/Z \quad \text{(espace quotient).}$$

Chaque élément f de $K'_1(\Omega) + \cdots + K'_r(\Omega)$ peut être identifié avec une distribution sur Ω, somme de distributions $k'_i \in K'_i(\Omega)$, $i = 1, \cdots, r$; $f = k'_1 + \cdots + k'_r$; et l'on a aussi

$$(1.7) \qquad K'_1(\Omega) + \cdots + K'_r(\Omega) \subset E'(\Omega), \quad \text{l'injection étant continue.}$$

On peut alors en déduire le

THÉORÈME 1.1. – *Sous les hypothèses faites, pour tout* $f \in K'_1(\Omega) + \cdots + K'_r(\Omega)$ *il existe* u *unique dans* $L^{p'}(\Omega)$ *telle que*

$$(1.8) \qquad A^* u = f \qquad \textit{c'est à dire telle que}$$

$$(1.9) \qquad (u, Av) = \langle f, \bar{v} \rangle \qquad \forall v \in E(\Omega)$$

et u *depend continûment de* f.

Il suffit en effet, si $f = k'_1 + \cdots + k'_r$, $k'_i \in K'_i(\Omega)$, de résoudre les équations $A^* u_i = k'_i$ $i = 1, \cdots, r$, et puis poser $u = u_1 + \cdots + u_r$; l'unicité découle de (1.2).

Remarque 1.1. – Le fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ soit dense dans chaque $K_i(\Omega)$ ne semble pas entrainer que $\mathcal{D}(\Omega)$ soit dense dans $\bigcap_{1=1}^{r} K_i(\Omega)$ [2].

2. On peut donner des applications du théorème 1.1 aux problèmes aux limites pour les opérateurs différentiels linéaires elliptiques ou paraboliques. Nous nous bornerons ici au problème de Dirichlet pour les équations elliptiques; mais on peut les généraliser aux problèmes aux limites étudiés dans [3], [4], [6].

On supposera maintenant pour simplifier que Ω est un ouvert borné de frontière Γ indéfiniment différentiable de dimension $n - 1$, Ω étant d'un seul coté de Γ. Si $x \in \Omega$ on pose $\rho(x) =$ distance de x à Γ et on introduit une bande $B \subset \Omega$ définie par

$$B = \{x : x \in \Omega, 0 < \rho(x) < \rho_0\}, \quad \rho_0 \text{ positif fixé.}$$

(2) M. L. Schwartz nous a fait part d'exemples d'espaces F_i, $i = 1, 2$ tels que $\mathcal{D}(\Omega)$ soit dense dans chacun d'eux et ne l'est pas dans $F_1 \cap F_2$. Nous ignorons ce qu'il en est dans la situation présent, sur les exemples d'espace $K_i(\Omega)$ que nous construirons ci après.

Si ρ_0 est suffisamment petit on peut recouvrir B à l'aide d'un système de cartes locales comme suit. Dans R^n_y, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ on pose

$$C = \left\{ y : \sum_{j=1}^{n-1} y_j^2 < 1 \,, -1 < y_n < 1 \right\} \quad , \quad C_+ = \{ y : y \in C \,, y_n > 0 \}$$

$$C_0 = \{ y : y \in C \,, y_n = 0 \}.$$

On considère una famille finie d'ouverts $\mathcal{O}_i$, $i = 1, \cdots, \nu$, tels que pour chaque i il existe un homéomorphisme $x \longrightarrow \theta_i(x)$ de $\mathcal{O}_i$ sur C indéfiniment différentiable et à Jacobien $\neq 0$, satisfaisant à

(*a*) θ_i applique $\mathcal{O}_i \cap \Omega$ sur C_+ et $\mathcal{O} \cap \Gamma$ sur C_0;

(*b*) si $\theta_i = \{\theta_{i,1}, \cdots, \theta_{i,n}\}$, alors $\theta_{i,n}(x) = \rho(x)$ pour $x \in \mathcal{O}_i \cap \Omega$;

(*c*) $B \subset \bigcup_{i=1}^{\nu} (\mathcal{O}_i \cap \Omega)$;

(*d*) θ_i et θ_j, si $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j \neq \emptyset$, satisfont aux conditions habituelles de compatibilité sur $\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ (3).

On supposera connus les espaces $W^{s,p}(\Omega)$ et $W^{s,p}(\Gamma)$ (cf. par ex. [3, III] où [9]) pour p réel > 1 et s réel quelconque: dans le cas s entier ≥ 0 $W^{s,p}(\Omega)$ est l'espace habituel de Sobolev des distributions u sur Ω telles que $D^k u \in L^p(\Omega)$ pour $|k| \leq s$.

On considère dans Ω un opérateur différentiel linéaire d'ordre $2m$

$$Au = \sum_{|k|,|h| \leq m} (-1)^{|k|} D^k (a_{kh} D^h u) \text{ (4)}$$

à coefficients indéfiniment différentiables dans $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, qui soit elliptique dans $\bar{\Omega}$ et l'on suppose que

(2.1) *A est un isomorphisme de* $W^{2m,p}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}^{m,p}(\Omega)$ *sur* $L^p(\Omega)$.

L'hypothèse (2.1) signifie donc que le problème de Dirichlet homogène

$$Au = f \text{ dans } \Omega \quad , \quad \gamma_j u = 0 \text{ sur } \Gamma, \qquad j = 0, \cdots, m-1$$

(γ_j dérivé d'ordre j selon la normale intérieure à Ω sur Γ) est résouluble de façon unique dans $W^{2m,p}(\Omega)$ pour chaque $f \in L^p(\Omega)$. On connait des conditions algébriques sur A pour que cette hypothèse soit vérifiée (cf. par exemple [3, III]).

(3) C'est à dire: il existe pour chaque i et j un homéomorphisme J_{ij}, indéfiniment différentiable et à Jacobien positif, de $\theta_i(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$ sur $\theta_j(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$ tel que $\theta_j(x) = J_{ij}(\theta_i(x))$ $\forall x \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$.

(4) $k = (k_1, \cdots, k_n)$, k_i entier ≥ 0, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$; $D^k u = \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}}$ $D^{(0,0,\cdots,0)} u = u$. On pourrait évidemnement améliorer les hyppothèses de différentiabilité sur les coefficients et aussi sur Ω.

On peut donc appliquer les remarques générales du n. 1; *dans ce cas* $E(\Omega) = W^{2m,p}(\Omega) \cap W_o^{m,p}(\Omega)$ (espace de Banach, muni de la norme de $W^{2m,p}(\Omega)$) *et il faut chercher des espaces* $K_i(\Omega)$ *tels que* (1.3) *et* (1.4) *soient vraies*. Évidemment on peut prendre $L^p(\Omega)$ et $W_o^{m,p}(\Omega)$; c'est ce que nous avons fait dans [3].

Nous donnerons dans les prochains numeros d'autres exemples d'espaces $K_i(\Omega)$ également intéressants.

3. *Un premier exemple est l'espace* $W_o^{m+(1/p),p}(\Omega)$ (adhérence de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $W^{m+(1/p),p}(\Omega)$).

L'hypothèse (1.4) étant évidemment verifiée, il faut démontrer seulement que

$$W^{2m,p}(\Omega) \cap W_o^{m,p}(\Omega) \subset W_o^{m+(1/p),p}(\Omega)\,, \text{ l'injection étant continue.} \tag{3.1}$$

Nous démontrerons un peu plus, à savoir:

$$W^{m+1,p}(\Omega) \cap W_o^{m,p}(\Omega) \subset W_o^{m+(1/p),p}(\Omega), \text{ l'injection étant continue,} \tag{3.2}$$

d'où évidemment résultera (3.1). Désignons par $F(\Omega)$ l'espace normé (non complet) des $u \in W^{m+1,p}(\Omega) \cap W_o^{m,p}(\Omega)$, muni de la norme de $W^{m+(1/p),p}(\Omega)$; (3.2) sera démontré si on aura la

Prop. 3.1: $\mathfrak{D}(\Omega)$ *est dense dans* $F(\Omega)$.

Démonstration:

1) On peut se ramener au cas où Ω coïncide avec $R_+^n = \{x : x_n > 0\}$ par un système de cartes locales et une partition de l'unité associée (par ex. on peut utiliser les cartes locales introduites au n. 3). Il faut rappeler aussi pour cela l'invariance des espaces $W^{s,p}(\Omega)$ par homéomorphismes (cf. par exemple (1.6) de [3, IV]).

2) Soit donc $\Omega = R_+^n$ et v une fonction de $F(R_+^n)$. Soit $b(t)$ une fonction indéfiniment différentiable dans $[0, +\infty[$, à support compact, avec $b(0) = 1$. Et soit $\psi(t)$ une fonction indéfinement différentiable dans $]-\infty, +\infty[$, $\equiv 0$ pour $t \leq 0$, $\equiv 1$ pout $t \geq 1$. Introduisons $u(x, t) = b(t)\, v(x)$ et $u_l(x, t) = u(x, t)\, \theta_l(x, t)$ pour $x \in R_+^n$, $t \in [0, +\infty[$, $l = 1, 2, \cdots$, où $\theta_l(x, t) = 1$ si $x \in R_+^n$, $t \geq 2/l$ et si $x_n \geq 2/l - t$, $0 \leq t \leq 2/l$; $\theta_l(x, t) = \psi[l(x_n + t - 1/l)]$ si $0 \leq x_n \leq 2/l - t$, $1/l \leq t \leq 2/l$ et si $1/l - t \leq x_n \leq 2/l - t$, $0 \leq t \leq 1/l$; $\theta_l(x, t) = 0$ si $0 \leq x_n \leq 1/l - t$, $0 \leq t \leq 1/l$.

3) $u_l(x, t)$ *demeure dans un ensemble borné de* $W(p, \alpha; W^{m+1,p}(R_+^h), W^{m,p}(R_+^n))$, $\alpha = 1 - 2/p$ [5].

(5) $W(p, \alpha; W^{m+1,p}(R_+^n), W^{m,p}(R_+^n))$ est l'espace des fonctions $u(x, t)$, $x \in R_+^n$, $t \in [0, +\infty[$, pour les quelles soit finie la norme

$$\| u \| = \max \left\{ \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \| u(x, t \|^p_{W^{m+1,p}(R_+^n)} dt \right)^{1/p}, \left(\int_0^{+\infty} t^{\alpha p} \left\| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right\|_{W^{m,p}(R_+^n)} dt \right)^{1/p} \right\},$$

cf. [3, III].

Comme $\frac{\partial\theta_l}{\partial x_n} = \frac{\partial\theta_l}{\partial t}$ et que $\theta_l(x, t)$ est constante par rapport a x_i, $i \neq n$, il suffit de démontrer que, si le support de $b(t)$ est contenu dans $[0, t_0]$:

$$\text{(3.3)} \qquad \int_0^{t_0} t^{\alpha p} \int_\Omega \left| D^k v(x) \frac{\partial^i \theta_l(x, t)}{\partial x_n^i} \right|^p dx\, dt \leq c_1 \qquad (c_1 \text{ indépendante de } l)$$

pour k et i tels que $|k| + i \leq m + 1$.

Pour $i = 0$, comme $|\theta_l| \leq 1$, (3.3) suit du fait que $v \in W^{m+1,p}(R_+^n)$ et que $\alpha p = p - 2 > -1$. Si $i > 0$ comme $\left| \frac{\partial^i \theta_l(x, t)}{\partial x_n^i} \right| \leq c_2 l^i$ (c_2 indépendante de l) et que $\frac{\partial^i \theta_l}{\partial x_n^i}$ a son support contenu dans la bande $0 \leq x_n \leq 2/l$, $0 \leq t \leq 2/l$, on a

$$\text{(3.4)} \qquad \int_0^{t_0} t^{\alpha p} \left| D^k v(x) \frac{\partial^i \theta_l(x, t)}{\partial x_n^i} \right|^p dx\, dt \leq c_3 l^{ip} \int_0^{2/l} t^{\alpha p} \int_{S_l} |D^k v(x)|^p dx\, dt$$

où S_l est la bande $0 \leq x_n \leq 2/l$ de R_+^n et c_3 est indépendante de l.

Mais on a, si $|k| + i \leq m + 1$ et $i > 0$

$$\text{(3.5)} \qquad \int_{S_l} |D^k v(x)|^p dx \leq c_4 l^{-1-p(i-1)} \qquad (c_4 \text{ indépendante de } l).$$

En effet comme $v \in W_0^{m,p}(R_+^n)$, $D^h v(x)$, pour $|h| \leq m - 1$, a sa trace nulle pour $x_n = 0$ et alors on a la majoration

$$\text{(3.6)} \qquad \int_{S_l} |D^h v(x)|^p dx = \leq 2^p l^{-p} \int_{S_l} \left| \frac{\partial D^h v(x)}{\partial x_n} \right|^p dx ;$$

par contre si $|h| = m$, comme $v \in W^{m+1,p}(R_+^n)$, [6] on a

$$\text{(3.7)} \qquad \int_{S_l} |D^h v(x)|^p dx \leq c_5 l^{-1} \qquad (c_5 \text{ indépendante de } l).$$

Et alors en utilisant (3.6) et (3.7) de façon réitérée on trouve (3.5). De (3.4) et (3.5), comme $\alpha p = p - 2$, on a tout de suite (3.3), c. q. f. d.

4) Rappelons maintenant (cf. [3, III], définition de $T(p, \alpha; X_0, X_1)$ et Prop. 2.4) que $W^{m+(1/p),p}(R_+^n)$ est l'espace des traces pour $t = 0$ des fonctions $t \to u(x, t)$ appartenantes à $W(p, \alpha; W^{m+1,p}(R_+^n), W^{m,p}(R_+^n))$, l'application

(6) Il existe alors sur chaque iperplan $x_n = \text{const.}$ la trace de $D^h v(x)$ et l'on a

$$\int_{R^{n-1}} |D^h v(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)|^p dx_1, \cdots, dx_{n-1} \leq c \, \|v\|_{W^{m+1,p}(R_+^n)}$$

c indépendante de x_n.

$u(x, t) \to u(x, 0)$ étant continue; donc de 3) on déduit que l'on peut extraire de u_l une suite u_j telle que $u_j(x, 0) \to u(x, 0) = v(x)$, faiblement dans $W^{m+(1/p),p}(R^n_+)$ et donc dans $F(R^n_+)$, pour $j \to \infty$.

On en déduit que l'espace $F(R^n_+) \cap \mathcal{E}'(R^n_+)$ des éléments de $F(R^n_+)$ à support compact dans R^n_+ est dense dans $F(R^n_+)$. Et alors par régularisation sur les éléments de $F(R^n_+) \cap \mathcal{E}'(R^n_+)$, maintenant possible (voir aussi la Prop. 1.2 de [3, III]), on voit que $\mathcal{D}(R^n_+)$ est dense dans $F(R^n_+)$, d'où la Prop. 3.1.

Remarque 3.1. – En fait on peut montrer que $W^{m+1/p,p}(\Omega) \cap W^{m,p}_0(\Omega) = W^{m+1/p,p}_0(\Omega)$, ce qui complète la Prop. 5.1 de [3, V].

4. D'autres exemples d'espaces $K_i(\Omega)$ peuvent etre obtenus en utilisant le théorème d'injection de Sobolev (cf. par exemple [12]).

En appliquant m fois ce théoreme on obtient que $W^{2m,p}(\Omega) \subset W^{m,q}(\Omega)$ avec $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$ si $n > mp$ et q fini quelconque si $n \leq mp$; et alors on a

$$W^{2m,p}(\Omega) \cap W^{m,p}_0(\Omega) \subset W^{m,q}_0(\Omega) \quad \text{l'injection étant continue.} \tag{4.1}$$

$W^{m,q}_0(\Omega)$ *est donc un espace* $K_i(\Omega)$.

Mais on peut aussi utiliser le théorème de Sobolev et les considérations du n. 3; par exemple, en appliquant $m - 1$ fois le théorème de Sobolev, on obtient

$$W^{2m,p}(\Omega) \cap W^{m,p}_0(\Omega) \subset W^{m+1,s}(\Omega) \cap W^{m,s}_0(\Omega) \tag{4.2}$$

avec $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \frac{m-1}{n}$ si $n > (m-1)p$ et s fini quelconque si $n \leq (m-1)p$; et alors de (4.2), grace à (3.2) (avec s au lieu de p) on déduit

$$W^{2m,p}(\Omega) \cap W^{m,p}_0(\Omega) \subset W^{m+1/s,s}_0(\Omega). \tag{4.3}$$

Cet espace $W^{m+1/s,s}_0(\Omega)$ *est encore un autre exemple d'espace* $K_i(\Omega)$ *différent soit du* $W^{m+1/p,p}_0(\Omega)$ *du n. 3 soit du* $W^{m,q}_0(\Omega)$ *précédent.*

5. Un autre exemple repose sur les espaces avec «poids». Avec les notations du n. 2, on considère la famille d'ouverts $\mathcal{O}_i$, $i = 1, \cdots, \nu$; soit $\{\beta_i\}$ une partition de l'unité associée: $\sum_{i=1}^{\nu} \beta_i(x) = 1$ sur $\bigcup_{i=1}^{\nu} \mathcal{O}_i$, β_i indéfiniment différentiable sur R^n et à support dans $\mathcal{O}_i$. Si u est une fonctions définie sur Ω, on introduit la fonction $\Phi_i u$ sur C_+ par: $\Phi_i u(y) = (\beta_i u)(\theta_i^{-1}(y))$, où θ_i^{-1} est l'homéomorphisme inverse de θ_i. On désigne par Ω_1 l'ensemble ouvert des $x \in \Omega$ tels que $\rho(x) > (1/2)\rho_0$, et on pose la

Definition 5.1. – *On désigne par* $\mathcal{K}(\Omega)$ *l'espace des* u *tels que*

$$u \in W^{m,p}_0(\Omega) \cap W^{2m,p}_{loc}(\Omega); \text{ (7)} \tag{5.1}$$

(7) $W^{2m,p}_{loc}(\Omega)$ c'est l'espace des u qui sont dans $W^{2m,p}(\sigma)$ pour chaque boule σ telle que $\sigma \subset \Omega$.

(5.2) $\quad D^{k'}\Phi_i u \in L^p(C_+)$ *pour tout* $k' = (k_1, \cdots, k_{n-1}, 0)$ *avec* $|k'| \leq 2m$;

(5.3) $$y_n^{m-1/p} \frac{\partial^{2m}}{\partial y_n^{2m}} \Phi_i u \in L^p(C_+);$$

$i = 1, \cdots, \nu$, *muni de la norme*

(5.4) $$\| u \|_{\mathfrak{K}(\Omega)} = \Bigg[\| u \|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \| u \|^p_{W^{2m,p}(\Omega_1)} + \sum_{i=1}^{\nu} \Bigg\{ \sum_{|k'| \leq 2m} \| D^{k'} \Phi_i u \|^p_{L^p(C_+)} + \\ + \Big\| y_n^{m-1/p} \frac{\partial^{2m}\Phi_i u}{\partial y_n^{2m}} \Big\|^p_{L^p(C_+)} \Bigg\} \Bigg]^{1/p}.$$

C'est un espace de Banach réflexif; en abrégé on peut dire que c'est l'espace des $u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W_{loc}^{2m,p}(\Omega)$ tels que les dérivées « tangentielles » d'ordre $\leq 2m$ sont dans $L^p(\Omega)$ et $\rho^{m-1/p} \cdot D_\rho^{2m} u \in L^p(B)$, D_ρ^{2m} désignant la derivée d'ordre $2m$ par rapport à la normale a Γ ($\rho^{m-1/p}$ est le « poid »).

Remarque 5.1. – Les espaces avec « poids » ont été utilisés par de très nombreux auteurs, cf. le rapport [9], où l'on trouverà d'autres indications bibliographiques; dans les problèmes aux limites des espaces avec poids on été utilisés aussi dans [7] et [8]; pour des propriétés de traces, cf. [13], [2], [10].

$\mathfrak{K}(\Omega)$ est aussi « dissymétrique » par rapport aux variables « tangentielles » et « normales »; pour d'autres espaces dissymétriques cf. [3, I], [1].

Remarque 5.2. – On vérifie que $\mathfrak{K}(\Omega)$ ne dépend pas de ρ_0 et du système de cartes locales choisies, un changement de ρ_0 et des cartes locales donnant une norme equivalente à (5.4).

On va vérifier que $\mathfrak{K}(\Omega)$ *ainsi défini satisfait à* (1.3) *et* (1.4). Evidemment on a l'inclusion $W^{2m,p}(\Omega) \cap W_0^{m,p}(\Omega) \subset \mathfrak{K}(\Omega)$.

Il nous faut maintenant démontrer que $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathfrak{K}(\Omega)$; on a avant tout le

LEMME 5.1. – *Soit* E *un espace de Banach réflexif. On désigne par* X *l'espace des fonctions* $t \to u(t)$ *appartenantes à* $L^p(0, 1; E)$ *telles que* $u^{(m)} \in L^p(0, 1; E)$ *et* $t^\lambda u^{(2m)} \in L^p(0, 1; E)$ *avec* $p > 1$, $\lambda = m - 1/p$ *et*

(5.5) $$u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(m-1)}(0) = 0$$

(5.6) $$u(1) = u'(1) = \cdots = u^{(2m-1)}(1) = 0.$$

Muni de la norme

(5.7) $$\| u \|_X = \{ \| u^{(m)} \|^p_{L^p(0,1;E)} + \| t^\lambda u^{(2m)} \|^p_{L^p(0,1;E)} \}^{1/p}$$

c'est un espace de Banach, dans le quel l'espace $\mathfrak{D}(0, 1; E)$, *des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans* $]0, 1[$ *et à valeur dans* E, *est dense.*

Démonstration. – Soit $u \to L(u)$ une forme linéaire continue sur X telle que $L(\varphi) = 0 \;\forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(0, 1; E)$. On veut montrer que $L(u) = 0 \;\forall u \in X$. On a d'après un théorème de Phillips sur le dual de $L^p(0,1;E)$ et un corollaire connu du théorème de Hahn–Banach:

$$(5.8) \qquad L(u) = \int_0^1 (\langle f, u^{(m)}\rangle + \langle g, t^\lambda u^{(2m)}\rangle)\, dt,$$

$$f \text{ et } g \in L^{p'}(0,1;E'),\ E' \text{ dual de } E,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

d'où, puisque $L(\varphi) = 0$, l'on déduit

$$(5.9) \qquad (-1)^m f^{(m)} + (t^\lambda g)^{(2m)} = 0.$$

Si l'on pose

$$(5.10) \qquad h(t) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau)\, d\tau$$

et l'on intègre (5.9) $2m$ fois entre 0 et t, on a

$$(5.11) \qquad t^\lambda g(t) + (-1)^m h(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{2m-1} t^{2m-1}, \text{ avec } a_i \in E'.$$

Notons que, en utilisant m fois une inégalité bien connue de Hardy, on a $t^{-m} h(t) \in L^{p'}(0,1;E')$ et donc

$$t^{(1/p)-m}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{2m} t^{2m-1}) = g(t) + (-1)^m t^{1/p}(t^{-m} h(t)) \in L^p(0,1;E').$$

Or $t^{(1/p)-m}(a_j t^j) \in L^{p'}(0,1;E')$ si $j = m, m+1, \cdots, 2m-1$; donc $t^{(1/p)-m}(a_0 + a_1 t + \cdots + a_{m-1} t^{m-1}) \in L^{p'}(0,1;E')$. Pour $e \in E$ quelconque, posons $\alpha_j = \langle a_j, e\rangle$, $\mathfrak{A}(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j$; alors $t^{(1/p)-m}\mathfrak{A}(t) \in L^{p'}(0,1)$. Mais si $\mathfrak{A}(t)$ n'était pas $\equiv 0$, on aurait $|\mathfrak{A}(t)| \geq c t^{m-1}$ dans $[0, t_0]$ avec $0 < t_0 < 1$ et $c \neq 0$, donc $\int_0^{t_0} t^{((1/p)-1)p'}\, dt < \infty$, ce qui est absurde car $\left(\frac{1}{p} - 1\right)p' = -1$.

Donc on a $a_0 = \cdots = a_{m-1} = 0$ et (5.11) devient

$$(5.12) \qquad t^{-1/p} g(t) + (-1)^m t^{-m} h(t) = b_0 + b_1 t + \cdots + b_{m-1} t^{m-1},\ b_j \in E'.$$

En utilisant (5.12), $L(u)$ devient

$$(5.13) \qquad L(u) = \int_0^1 \{\langle f, u^{(m)}\rangle + \langle (-1)^{m+1} h, u^{(2m)}\rangle\}\, dt + \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^1 \langle b_j t^{j+m}, u^{(2m)}\rangle\, dt.$$

Mais $\int_0^1 t^{j+m} u^{(2m)}\, dt = 0$ pour $j = 0, \cdots, m-1$ grâce à (5.5) et à (5.6); reste d'après (5.13)

$$(5.14)\qquad \mathrm{L}(u)=\int_0^1\langle f, u^{(m)}\rangle\,dt+(-1)^{m+1}\int_0^1\langle h, u^{(2m)}\rangle\,dt=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_\varepsilon^1\langle f, u^{(m)}\rangle\,dt+(-1)^{m+1}\int_\varepsilon^1\langle h, u^{(2m)}\rangle\,dt\right\}.$$

En posant $u^{(m)}=v$ et en intégrant par parties, on a

$$\mathrm{L}(u)=\lim_{\varepsilon\to 0}\,[(-1)^m\langle h(\varepsilon), v^{(m-1)}(\varepsilon)\rangle+(-1)^{m-1}\langle h'(\varepsilon), v^{(m-2)}(\varepsilon)\rangle+\cdots$$
$$\cdots+(-1)\langle h^{(m-1)}(\varepsilon), v(\varepsilon)\rangle],$$

et il reste à montrer que

$$(5.15)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\langle h^{(j)}(\varepsilon), v^{(m-j-1)}(\varepsilon)\rangle=0\qquad j=0,1,\cdots,m-1.$$

Or $h^{(j)}(t)=\displaystyle\int_0^t\frac{(t-\tau)^{m-1-j}}{(m-1-j)!}f(\tau)\,d\tau$ donc

$$(5.16)\qquad \|h^{(j)}(t)\|_{\mathrm{E}'}\leq c_1\left(\int_0^t(t-\tau)^{(m-j-(1/p))}\,d\tau\right)^{1/p}\left(\int_0^t\|f(\tau)\|_{\mathrm{E}'}^{p'}\,d\tau\right)^{1/p'}\leq$$
$$\leq c_2\,t^{m-j-1+(1/p)}\qquad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ constantes}).$$

Puis

$$v^{(m-1)}(t)=-\int_t^1 v^{(m)}(\tau)\,d=-\int_t^1\tau^\lambda v^{(m)}(\tau)\,\tau^{-\lambda}\,d\tau,\quad \text{d'où}$$

$$\|v^{(m-1)}(t)\|_{\mathrm{E}}\leq\left(\int_t^1\|\tau^\lambda v^{(m)}(\tau)\|_{\mathrm{E}}^p\,d\tau\right)^{1/p}\left(\int_t^1\tau^{-\lambda p'}\,d\tau\right)^{1/p'}\leq c_3\,t^{-\lambda+(1/p')}=c_3\,t^{-m+1}.$$

Ensuite

$$v^{(m-2)}(t)=-\int_t^1 v^{(m-1)}(\tau)\,d\tau\quad\text{donc}$$

$$\|v^{(m-2)}(t)\|_{\mathrm{E}}\leq c_4\,t^{-m+2}\quad\text{et en géneral}$$

$$(5.17)\qquad \|v^{(m-j-1)}(t)\|_{\mathrm{E}}\leq c_{j+1}\,t^{-m+j+1}\quad (c_{j+1}\text{ constante})\ j=0,1,\cdots,m-1.$$

De (5.16) et (5.17) on déduit (5.15), c. q. f. d.[8].

En utilisant le lemme 5.1 on peut maintenant démontrer la

Prop. 5.1. *$\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{K}(\Omega)$.*

Démonstration. – Par cartes locales et partition de l'unité associée on est ramené à approcher $\Phi_i u$ pour tout $i=1,\cdots,\nu$, u etant donné dans $\mathcal{K}(\Omega)$,

(8) La démonstration précédente a quelques points communs avec une démonstration donnée dans E. T. POULSEN [10].

par une suite d'éléments de $\mathfrak{D}(C_+)$ (espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans C_+) pour la norme

$$(5.18) \qquad \| v \|_{W^{m,p}(C_+)} + \sum_{|k'| \leq 2m} \| D^{k'} v \|_{L^p(C_+)} + \left\| y_n^{m-1/p} \frac{\partial^{2m} v}{\partial y_n^{2m}} \right\|_{L^p(C_+)} .$$

Or la fonction $\Phi_i u$ est $= 0$ au voisinage de $\partial C_+ - C_0$ (∂C_+ frontière de C_+); on peut donc régulariser en $y' = (y_1, \cdots, y_{n-1})$ et $\Phi_i u$ est limite au sens de (5.18) de ses régularisées en y'.

Alors on est ramené à approcher une fonction $v(t)$ telle que

$$v(t), v^{(m)}(t), t^{m-1/p} v^{(2m)}(t) \in L^p(0, 1; W_0^{l,p}(C_1))$$

l entier arbitrairement grand, C_1 ouvert tel que $\overline{C}_1 \subset C_0$, $y_n = t$, et vérifiant (grace aussi au fait que $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$):

$$v \equiv 0 \qquad \text{au voisinage de } t = 1$$

$$v(0) = v'(0), \cdots, = v^{(m-1)}(0) = 0 .$$

On est donc dans les conditions d'application du lemme 5.1; il existe une suite de $\varphi_j \in \mathfrak{D}(0, 1; W_0^{l,p}(C_1))$ tels que $\lim_{j \to \infty} \varphi_j = v$ dans $L^p(0, 1; W_0^{l,p}(C_1))$. On peut enfin prolonger φ_j par zéro hors de C_1 et régulariser en y' en restant toutefois avec le support dans C_0. On a ainsi trouvé une suite de $\Psi_j \in \mathfrak{D}(C_+)$ tels que $\Psi_j \to \Phi_j u$ par (5.18) et la Prop. 5.1 est demontrée.

Remarque 5.3. – En utilisant un théorème (voir [5] et [13]) sur les espaces avec poids on trouve que $\mathcal{K}(\Omega) \subset W^{m+(1/p),p}(\Omega)$ et donc grâce à la Prop. 5.1, $\mathcal{K}(\Omega) \subset W_0^{m+(1/p),p}(\Omega)$; on trouve donc encore la relation (3.1). Il faut toutefois noter qu'au n. 3 nous avons démontré une proposition (la Prop. 3.1) différente et plus précise que (3.1), de la quelle on à déduit aussi la relation (4.3).

6. Conclusions. – Si l'on applique maintenant le Théorème 1.1 à l'operateur différentiel A du n. 2 en prenant les espaces $K_i(\Omega)$ des n. 3, 4 et 5, on obtient des résultats nouveaux sur le problème de Dirichlet

$$(6.1) \qquad A^* u = f \quad , \quad \gamma_j u = 0 \qquad j = 0, \cdots, m-1$$

où A^* est ici l'adjoint *formel* de A c'est à dire

$$(6.2) \qquad A^* u = \sum_{|k| \, |h| \leq m} (-1)^{|k|} D^k (\bar{a}_{hk} D^h u) .$$

En effet on peut prendre f appartenant à $W^{-m-(1/p),p'}(\Omega)$ [9] ou à $W^{-m,q'}(\Omega)$ ou à $W^{-m-(1/s),s'}(\Omega)$ ou à $\mathcal{K}'(\Omega)$ (duals respect. de $W_0^{m+(1/p),p}(\Omega)$, $W_0^{m,q}(\Omega)$, $W_0^{m+(1/s),s}(\Omega)$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, et de $\mathcal{K}(\Omega)$) ou encore à leur «somme» au sens du n. 1; de l'equation (1.9) on déduit alors $A^* u = f$ au sens de distributions sur Ω, où A^* est l'opérateur (6.2), qui est également elliptique. Mais on

(9) Dans le cas $p = 2$, cette remarque est due a L. Schwartz.

peut aussi déduire de (1.9), en appliquant les théorèmes de traces que nous avons données dans [3] et [6], que l'on a $\gamma_j u = 0$ au sens de $W^{-j-(1/p'),p'}(\Gamma)$.

Et par les mêmes méthodes que dans [3] et [6] on peut aussi résoudre le problème de Dirichlet non homogène

$$A^* u = f \quad , \quad \gamma_j u = g_j \qquad j = 0, \cdots, m-1 \tag{6.3}$$

avec $g_j \in W^{-j-(1/p'),p'}(\Gamma)$ et f dans un quelconque des espaces indiqués ou dans leur « somme ».

Il faut noter la grande généralité que l'on peut donner à f, par exemple si $f = \sum_{|k|=2m} D^k (\rho^{m-1/p}(x)\, \Psi_k(x))$ avec $\Psi_k(x) \in L^{p'}(\Omega)$ alors $f \in \mathcal{K}'(\Omega)$. Du point de vue des hypothéses sur f on généralise ainsi des resultats antérieurs (voir [3] et pour le cas d'une équation de deuxième ordre en deux variables [11] où f est supposé infinie au voisinage de Γ au plus comme $\rho^{-\mu}$ avec $\mu < 2$; voir aussi pour $p = 2$ [8]).

BIBLIOGRAFHIE.

[1] G. GEYMONAT, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche*, à paraître aux « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa » (1962).

[2] J. L. LIONS, *Un théorème de traces, applications*, « C. R. Acad. Sc. Paris », *249*, pp. 2259–2261 (1959).

[3] J. L. LIONS–E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes (I), (III), (IV), (V)*, « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa », XIV, pp. 259–308 (1960), XV, pp. 39–101 et 311–326 (1961), XVI, pp. 1–44 (1962); *(II)* « Ann. Inst. Fourier », *11*, pp. 137–178 (1961).

[4] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Remarques sur les problèmes aux limites pour opérateurs paraboliques*, « C. R. Acad. Sc. Paris », *251*, pp. 2118–2120 (1960).

[5] P. I. LIZORKIN, *Propriétés sur la frontière des fonctions de classes avec poids* (en russe), « Doklay Akad. Nauk. », *132*, pp. 514–517 (1960).

[6] E. MAGENES, *Sur les problèmes aux limites pour les équations linéaires elliptiques* (Colloque International sur les équations aux dérivées partielles), Paris, Juin 1962.

[7] H. MOREL, thèse, Paris 1961; à paraitre aux « Ann. Inst. Fourier » (1962).

[8] J. NEČAS, *On the regularity of solutions . . .*, « Arch. for Rat. Mech. Anal. », *9*, pp. 134–144 (1962); *Sur une méthode pour resoudre . . .* à paraitre aux « Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa » (1962).

[9] S. M. NIKOLSKII, *Sur les théorèmes . . .* (en russe), « Ouspeki Mat. Nauk », XVI, *5* (101), pp. 63–114, (1961).

[10] E. T. POULSEN, *Boundary value in function spaces*, à paraitre aux « Mat. Scand. » (1962).

[11] G. PRODI, *Sul primo problema al contorno . . .* « Rend. Ist. Lomb., Sc. », *90*, pp. 189–208 (1956).

[12] L. SCHWARTZ, *Théorie des didtributions*, I et II, Paris 1950–51.

[13] S. V. USPENSKII, *Propriétés des classes* W_p^r . . . (en russe), « Doklady Akad. Nauk. », *132*, pp. 60–62 (1960).