Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Zofia Szmydt

Sui problemi di Dirichlet e di Neuman con dati al contorno generalizzati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 867–872.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_867_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi matematica. — *Sui problemi di Dirichlet e di Neuman con dati al contorno generalizzati.* Nota di ZOFIA SZMYDT, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Nel paragrafo 3 di questa Nota sono considerati i problemi di Neuman (problema N) e di Dirichlet (problema D) con dati al contorno generalizzati. Mediante questi dati si costruiscono opportune funzioni e si dimostra che tali funzioni forniscono le soluzioni dei problemi al contorno considerati. Questa dimostrazione è basata sui teoremi esposti nel paragrafo 2, ed che a loro volta risultano facilmente dai teoremi dimostrati nella Memoria [3] ed esposti inoltre nella [4]. Osserviamo che il prof. G. Fichera nella Memoria [1] ha stabilito un teorema d'unicità per il problema di Dirichlet considerato nel paragrafo 3. Le notazioni che vengono adoperate nei paragrafi 2 e 3 sono introdotte nel paragrafo 1.

1. NOTAZIONI. – Diremo che la funzione $\psi(s)$ definita nell'intervallo infinito I: $-\infty < s < \infty$ è una funzione di classe C^m $[C^m_\beta]$ se è dotata della derivata di ordine m la quale è continua in I [la quale verifica la condizione di Hölder con l'esponente β, $0 < \beta \leq 1$].

Sia Σ una curva semplice e chiusa di classe C^1 contenuta nel piano della variabile complessa $z = x + iy$. Con tale locuzione intendiamo dire che Σ è il luogo descritto dal punto $z = z(s)$ dove la funzione $z(s) = x(s) + iy(s)$ verifica le seguenti condizioni: (i) è continua con la sua derivata prima $z'(s)$, periodica di periodo L; (ii) $z(s_1) = z(s_2)$ con $0 \leq s_1 < s_2 \leq L$ se e solo se $s_1 = 0$ e $s_2 = L$. Supponiamo inoltre: (iii) $|z'(s)| = 1$ se $0 \leq s \leq L$. La curva Σ si dice di classe C^n $[C^n_\beta]$ se la funzione periodica $z(s)$ è di classe C^n $[C^n_\beta]$.

Sia Ω il dominio limitato dalla curva Σ, n_z la normale interna alla Σ in $z \in \Sigma$ e ν_z il versore di questa normale. Con ρ indicheremo sempre un numero positivo e con r un numero non negativo. Con Σ_r sarà indicata una curva data dall'equazione $z = z_r(s)$ dove $z_r(s) = z(s) + r\nu[z(s)]$ se $0 \leq s \leq L$.

Osserviamo che se Σ è una curva semplice e chiusa di classe C^1_1, esiste un numero positivo r_0 tale che se $r \leq r_0$, la curva Σ_r è una curva chiusa e inoltre $z_r(s_1) = z_r(s_2)$ con $0 \leq s_1 < s_2 \leq L$ se e solo se $s_1 = 0$ e $s_2 = L$.

Diciamo che la funzione $f(z)$ definita sulla curva Σ_r è di classe $C^m(\Sigma_r)$ se la funzione periodica $\overset{*}{f}_r(s) = f[z_r(s)]$ è una funzione di classe C^m nell'intervallo infinito I.

Con $K^m(\Sigma, +)$ indichiamo l'insieme delle funzioni $p(z)$ che godono delle seguenti due proprietà: (*a*) $p(z)$ è una funzione di classe $C^m(\Sigma_r)$ per ogni $0 \leq r \leq r_0$, (*b*) posto $\overset{*}{p}_r(s) = p[z_r(s)]$, si ha: $\lim_{r \to 0} \frac{d^j}{ds^j} \overset{*}{p}_r(s) = \frac{d^j}{ds^j} \overset{*}{p}_0(s)$, $j = 0, 1, \cdots, m$, uniformemente in $0 \leq s \leq L$.

(*) Nella seduta del 12 giugno 1962.

Sia m un qualsiasi intero non negativo. Chiamiamo $D_m(\Sigma)$ lo spazio di Banach reale delle funzioni reali $u(z)$ di classe $C^m(\Sigma)$ con la norma definita nel modo seguente:

$$\| u \| = \sum_{k=0}^{m} \max_{0 \leq s \leq L} \left| \frac{d^k u[z(s)]}{ds^k} \right| .$$

Con $D_m^*(\Sigma)$ indichiamo lo spazio duale di $D_m(\Sigma)$ (spazio delle distribuzioni di ordine $\leq m$).

2. TEOREMA I. – *Sia m un intero non negativo e sia Σ una curva semplice e chiusa di classe C^{m+2} se $m \geq 1$ e di classe C_1^1 se $m = 0$. Supponiamo che la funzione $p(z)$ verifichi la condizione $K^m(\Sigma, +)$. In queste ipotesi la funzione $\int_\Sigma p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| \, ds_z$ appartiene allo spazio $D_m(\Sigma)$ e per ogni funzionale $G \in D_m^*(\Sigma)$ risulta:*

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \, G \left[\frac{\partial}{\partial n_z} \log |z_\varrho - \zeta| \right] ds_{z_\varrho} = G \left[\int_\Sigma p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log |z - \zeta| \, ds_z \right] + \pi G[p].$$

TEOREMA II. – *Nelle ipotesi del Teorema I la funzione $\int_\Sigma p(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| \, ds_z$ appartiene allo spazio $D_m(\Sigma)$ e per ogni funzionale $G \in D_m^*(\Sigma)$ risulta:*

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\Sigma_\varrho} p(z_\varrho) \, G \left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z_\varrho - \zeta| \right] ds_{z_\varrho} = G \left[\int_\Sigma p(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta| \, ds_z \right] - \pi G[p].$$

I Teoremi I e II seguono subito dai Teoremi 2 e 4 dimostrati nella Memoria [3].

3. PROBLEMA N. – Assegnata nello spazio $D_m^*(\Sigma)$ la distribuzione G si ricerca una funzione armonica v in Ω la quale verifichi la condizione al contorno generalizzata:

$$\lim_{\varrho \to 0} \int_{\Sigma_\varrho} p \frac{\partial v}{\partial n} ds_\varrho = G[p_t] \qquad \text{per ogni} \quad p \in K^m(\Sigma, +), \tag{1}$$

denotando p_t la traccia di p su Σ.

TEOREMA III. – *Sia m un intero non negativo e sia Σ una curva semplice e chiusa di classe C^{m+2} se $m > 0$ e di classe C_1^1 se $m = 0$. In queste ipotesi, condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione del problema N è che sia:*

$$G[1] = 0 . \tag{2}$$

Se la condizione (2) è soddisfatta, esiste un insieme U di funzionali $H \in D_m^*(\Sigma)$ tali che la funzione $v(z)$ così definita:

$$v(z) = H[\log |z - \zeta|] + \text{cost}, \tag{3}$$

sia una soluzione del problema N. Si ottengono tutti i funzionali dell'insieme U *aggiungendo ad uno di essi il funzionale* $\Phi_\alpha[g] = \alpha \int\limits_{\Sigma} g\varphi_0 \, ds$ *dove* α *è una costante reale arbitraria e* φ_0 *una soluzione non banale dell'equazione:*

$$(4) \qquad \pi\varphi(\zeta) + \int\limits_{\Sigma} \varphi(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta| \, ds_z = 0 .$$

Nel caso in cui $\int\limits_{\Sigma} \varphi_0(z) \log|z - \zeta| \, ds_z \neq 0$ *per* $\zeta \in \Omega$, *ogni funzione* (3) *si lascia mettere sotto la forma* $\tilde{\mathrm{H}}[\log|z - \zeta|]$ *con un opportuno* $\tilde{\mathrm{H}} \in \mathrm{U}$.

Dimostrazione. – La necessità della condizione (2) è ovvia, dato che per ogni funzione $v(z)$ armonica in Ω risulta $\int\limits_{\Sigma_\varrho} \frac{\partial v}{\partial n_z} ds_\varrho = 0$ ed inoltre la funzione $p(z) \equiv 1$ in $\bar{\Omega}$, appartiene all'insieme $\mathrm{K}^m(\Sigma, +)$. Ammettiamo quindi l'ipotesi (2). Associando ad ogni funzione $g \in \mathrm{C}^m(\Sigma)$ la costante $c_g = \frac{1}{\beta} \int\limits_{\Sigma} g\varphi_0 \, ds$ con [1] $\beta = \int\limits_{\Sigma} \varphi_0 \, ds$, consideriamo una qualsiasi soluzione p_g dell'equazione integrale:

$$g(\zeta) - c_g = \pi p(\zeta) + \int\limits_{\Sigma} p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z - \zeta| \, ds_z .$$

In virtù dell'ipotesi (2) il numero $\mathrm{G}[p_g]$ non dipende dalla scelta della soluzione p_g e quindi la relazione:

$$(5) \qquad \mathrm{H}[g] = \mathrm{G}[p_g]$$

definisce un funzionale H nello spazio $\mathrm{D}_m(\Sigma)$. Si verifica facilmente che il funzionale H è lineare. Per dimostrare la sua continuità supponiamo di avere una successione $\{g_\nu\}$ di funzioni $g_\nu \in \mathrm{C}^m(\Sigma)$ che converge a zero nello spazio $\mathrm{D}_m(\Sigma)$. Denotando:

$$\mathrm{N}(z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z - \zeta| \quad , \quad f_\nu(\zeta) = \frac{1}{\pi} g_\nu(\zeta) - \frac{1}{\pi} c_{g_\nu} ,$$

$$c_{g_\nu} = \frac{1}{\beta} \int\limits_{\Sigma} g_\nu \varphi_0 \, ds ,$$

associamo ad ogni $\nu = 1, 2, \cdots$ l'equazione integrale:

$$(6) \qquad p(\zeta) = f_\nu(\zeta) + \lambda \int\limits_{\Sigma} p(z) \mathrm{N}(z, \zeta) \, ds_z \qquad \text{con} \quad \lambda = -1 .$$

In un primo momento supponiamo dimostrata questa proprietà:

(1) È noto che essendo φ una soluzione non banale dell'equazione (4) si ha $\beta \neq 0$.

PROPRIETÀ P. – *Esiste una successione* $\{p_\nu\}$ *convergente a zero nello spazio* $D_m(\Sigma)$ *e tale che per ogni* $\nu = 1, 2, \cdots$ *la funzione* p_ν *è una soluzione della equazione* (6).

Dalla Proprietà P segue: $\lim\limits_{\nu\to\infty} G[p_\nu] = 0$ per cui in virtù delle (2) e (5) risulta $\lim\limits_{\nu\to\infty} H[g_\nu] = 0$. E questo dimostra che il funzionale lineare H è continuo. Dimostriamo ora la Proprietà P.

Sia $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$ una qualsiasi [2] rappresentazione parametrica della curva Σ di classe C^1_1. Poiché $\lambda = -1$ è un autovalore di rango 1 e si annulla l'integrale $\int\limits_\Sigma f\varphi_0\, ds$, l'equazione $p(\sigma) = \tilde{f}_\nu(\sigma) - \int\limits_0^L p(s)\, N[z(s), z(\sigma)]\, ds$ con $\tilde{f}_\nu(s) = f_\nu[z(s)]$ ammette una soluzione particolare $\tilde{p}_\nu(\sigma)$ della forma [3]:

$$p_\nu(\sigma) = \tilde{f}_\nu(\sigma) - \int_0^L T(s, \sigma)\, \tilde{f}_\nu(s)\, ds \tag{7}$$

dove la funzione $T(s, \sigma)$ è limitata nell'insieme: $0 \leq s \leq L$, $0 \leq \sigma \leq L$ e per ogni σ fissato nell'intervallo chiuso $[0, L]$ risulta integrabile rispetto a s. La funzione $p_\nu(z) = \tilde{p}_\nu(s)$ per $z = z(s)$ verifica l'equazione (6) ed inoltre, essendo $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu(\zeta) = 0$ uniformemente per $\zeta \in \Sigma$ si ha:

$$\lim_{\nu\to\infty} p_\nu(\zeta) = 0 \qquad \text{uniformemente per} \quad \zeta \in \Sigma. \tag{8}$$

Nel caso $m = 0$ la Proprietà P è così stabilita. Se $m \geq 1$, la $z(s)$ è di classe C^{m+2} e si dimostra che la funzione $T(s, \sigma)$ è dotata delle derivate fino all'ordine m continue e limitate nell'insieme Z: $0 \leq s \leq L$, $L/5 \leq \sigma \leq 4L/5$ (cfr. la nota [3] e il lemma 2 della [3]). Dall'ipotesi fatta sulla successione $\{g_\nu\}$ e dall'identità (7) segue che:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{d^k}{d\sigma^k} \tilde{p}_\nu(\sigma) = 0, \quad \text{uniformemente in } L/5 \leq \sigma \leq 4L/5, \qquad k = 1, \cdots, m. \tag{9}$$

Sia $\tau = \sigma - L/2$ e sia $z^*(\tau) = z(\tau + L/2)$. Da quanto fatto in precedenza [4] segue che per ogni $\nu = 1, 2, \cdots$ esiste una soluzione $p^*_\nu(z)$ dell'equazione (6) tale che risulta:

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{d^k}{d\tau^k} p^*_\nu[z^*(\tau)] = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots, m, \tag{10}$$

uniformemente in $L/5 \leq \tau \leq 4L/5$.

(2) Si suppongono sempre verificate le condizioni (i) — (iii).

(3) Cfr. [2] p. 318, formula (3) con $p = 1$.

(4) La rappresentazione parametrica $z = z(s)$, $0 \leq s \leq L$, viene adesso sostituita dalla $z = z^*(\tau)$, $0 \leq \tau \leq L$.

Osserviamo che $p_\nu^*(z) - p_\nu(z) = \text{cost.}$ per $z \in \Sigma$. Poiché $\tau = \sigma - L/2$ dalle (9) e (10) risulta: $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{d^k}{d\sigma^k} \tilde{p}_\nu(\sigma) = 0$, $k = 1, \cdots, m$, uniformemente in $0 \leq \sigma \leq L$ e quindi:

$$(11) \qquad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\partial^k}{\partial s_\zeta^k} p_\nu(\zeta) = 0, \quad \text{uniformemente per } \zeta \in \Sigma, \qquad k = 1, \cdots, m.$$

Dalle (8) e (11) segue la Proprietà P per cui abbiamo dimostrato che il funzionale H definito dalla (5) appartiene allo spazio $D_m^*(\Sigma)$. Sfruttando il Teorema I si dimostra facilmente che la funzione (3) costruita mediante questo funzionale verifica la condizione al contorno (1) e quindi $H \in U$.

Sia ora $H_0 \in U$ e sia α un numero reale arbitrario. È ovvio che il funzionale $H_\alpha[g] = H_0[g] + \Phi_\alpha[g]$ appartiene all'insieme U. D'altra parte, se H è un qualsiasi funzionale dell'insieme U, il funzionale $\Psi[g] = H[g] - H_0[g]$ appartiene ovviamente a $D_m^*(\Sigma)$. Inoltre in virtù del Teorema I si ha:

$$\Psi\left[\pi p + \int_\Sigma p(z) \frac{\partial}{\partial n_z} \log|z - \zeta| \, ds_z\right] = 0 \qquad \text{per ogni } p(z) \in C^m(\Sigma).$$

Quindi: $\Psi[g - c_g] = 0$ per ogni $g \in C^m(\Sigma)$, cioè $\Psi[g] = \Phi_\alpha[g]$ con $\alpha = \frac{1}{\beta}\Psi[1]$. Risulta allora: $H[g] = H_0[g] + \Phi_\alpha[g]$. Poiché l'ultima tesi del Teorema III è evidente, il Teorema è dimostrato.

PROBLEMA D. – Assegnata nello spazio $D_m^*(\Sigma)$ la distribuzione F si ricerca una funzione armonica u in Ω, la quale verifichi la condizione al contorno generalizzata:

$$(12) \qquad \lim_{\varrho\to 0} \int_{\Sigma_\varrho} pu \, ds_\varrho = F[p_t] \qquad \text{per ogni funzione } p \in K^m(\Sigma, +),$$

denotando p_t la traccia di p su Σ.

TEOREMA IV. – *Sia m un intero non negativo e sia Σ una curva semplice e chiusa di classe C^{m+2} se $m > 0$ e di classe C_1^1 se $m = 0$. In queste ipotesi ad ogni funzionale $F \in D_m^*(\Sigma)$ corrisponde uno ed un sol funzionale $B \in D_m^*(\Sigma)$, tale che la funzione $u(z)$ così definita:*

$$(13) \qquad u(z) = B\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta|\right] \qquad \text{se } z \in \Omega$$

sia una soluzione del problema D *considerato.*

Dimostrazione. – Sia $f \in C^m(\Sigma)$. Indichiamo con $p_f(z)$ la soluzione dell'equazione:

$$(14) \qquad f(\zeta) = -\pi p(\zeta) + \int_\Sigma p(z) \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log|z - \zeta| \, ds_z.$$

Si dimostra facilmente che $p_f \in C^m(\Sigma)$ e che il funzionale B, definito dalla formula: $B[f] = F[p_f]$ appartiene allo spazio $D_m^*(\Sigma)$ (5). D'altra parte il Teorema II assicura che la funzione (13) definita da questo funzionale B verifica la condizione (12) e che ogni funzionale $A \in D_m^*(\Sigma)$ per il quale la funzione $u(z) = A\left[\frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log |z - \zeta|\right]$ soddisfa la (12) coincide con B.

Il Teorema IV è così dimostrato.

Osservazione. – Si può portare un esempio (6) nel quale il problema D non ha nessuna soluzione della forma $u(z) = H[\log|z - \zeta|]$ con $H \in D_m^*(\Sigma)$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. FICHERA, *Teorema di massimo modulo e unicità delle soluzioni generalizzate dei problemi al contorno*, «Atti della Accademia Nazionale dei Lincei», serie VIII, vol. 29, fasc. 6, 503–508 (1960).

[2] G. KOWALEWSKI, *Einführung in die Determinantentheorie, vierte Auflage*, Berlin 1954.

[3] Z. SZMYDT, *Sur l'approximation par des polynômes harmoniques sur le contour d'un domaine plan*, «Annales Polonici Mathematici», XI, 283–305 (1962).

[4] Z. SZMYDT, *Propriétés intégrales du potentiel logarithmique et ses applications*, «Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Sér. sci. math., astr. et phys.», vol. 10, No. 3, 139–144 (1962).

(5) Il fatto che per l'equazione (14) sussiste il teorema di unicità rende questa dimostrazione più semplice di quella fatta per il funzionale H, definito nella dimostrazione del Teorema III.

(6) Basta supporre $F[1] \neq 0$ nel caso in cui Σ è la circonferenza unitaria.