Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alexander Weinstein

Sulle soluzioni quasi periodiche di una classe di equazioni ellittiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 863–866.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_863_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi matematica. — *Sulle soluzioni quasi periodiche di una classe di equazioni ellittiche* (*). Nota di ALESSANDRO WEINSTEIN, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

La teoria di H. Bohr delle funzioni quasi periodiche (q. p.) è stata estesa da Bochner, e più recentemente da Amerio, alle funzioni i cui valori sono vettori di uno spazio di Banach. Questa teoria è stata applicata, con grande successo, alle equazioni differenziali iperboliche, compresa quella delle onde, da varî autori. Per la bibliografia, si confronti Amerio [1]. Nella presente Nota, discuteremo, in un semplice caso, funzioni q. p. relative alle equazioni ellittiche, che ammettono soluzioni a variabili separate. Allo scopo di porre in evidenza i lineamenti essenziali, ci limiteremo a considerare l'equazione di Helmholtz, in due variabili:

$$\Delta u + ku = 0 \quad , \quad u = u(x, y) \tag{1}$$

dove k è una costante reale data. Studieremo tale equazione in una striscia infinita $S : -\infty < x < +\infty$, $0 \leq y \leq \pi$ con le condizioni al contorno:

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{su } y = 0 \quad \text{e} \quad \gamma u + \delta \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{su } y = \pi$$

essendo α, β, γ e δ date costanti. Il nostro principale risultato sarà il seguente:

Sia $u(x, y)$ *una qualsiasi soluzione della equazione* (1) (*con le sopra descritte condizioni al contorno*) *la cui norma* L_2 *verifichi la condizione*

$$\| u \|_{L_2} = \int_0^\pi u^2(x, y)\, dy \leq Ce^{2A|x|} \qquad \begin{matrix} C > 0 \\ A \geq 0. \end{matrix} \tag{2}$$

Allora u, come funzione vettoriale di x, si decompone nella somma di tre parti: una funzione lineare di x, una somma di un numero finito di funzioni trigonometriche di x e una somma di un numero finito di esponenziali in x. Una, due o tutte tre tali parti possono essere identicamente nulle, a seconda dei valori di α, β, γ, δ, k, *ed* A. *In particolare, tutte le soluzioni limitate sono funzioni trigonometriche. La parte trigonometrica è periodica o quasi periodica.*

I varî casi dipendono, in genere, dalla discussione di una equazione trascendente. Nella presente Nota, considereremo in dettaglio solo la condizione al contorno $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$.

La dimostrazione delle nostre asserzioni è fondata sul metodo degli autovalori, che è stato principalmente sviluppato per $\Delta u = 0$ (Weinstein [2, 3, 7]).

(*) Questa ricerca è stata finanziata in parte dalla United States Air Force attraverso lo Air Force Office of Scientific Research of the Air Research e Development Command con il Contratto No. AF 49 (638) 228.

(**) Nella seduta del 12 giugno 1962.

I risultati in questi lavori vennero dati per condizioni al contorno del tipo $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

La ricerca delle soluzioni esponenziali è stata considerata quale una estensione del principio di Phragmen–Lindelöf in [4]. Per ulteriori sviluppi, cfr. P. D. Lax [5].

Applicando questo metodo, introduciamo l'equazione

$$\varphi''(y) + \lambda\varphi(y) = 0 \tag{3}$$

dove $\varphi(y)$ soddisfa per $y = 0$ e $y = \pi$ la stessa condizione al contorno di $u(x, y)$. È ben noto che questo problema di autovalori per (3) ammette uno spettro discreto che è inferiormente limitato ma che non è necessariamente positivo. Abbiamo allora un sistema ortonormale e completo di autofunzioni $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ corrispondenti agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$. Possiamo allora sviluppare $u(x, y)$ in una serie uniformemente convergente rispetto a y:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\,\varphi_n(y) \tag{4}$$

dove i coefficienti c_n dipendono da x e sono dati da

$$c_n(x) = \int_0^\pi u(x, y)\,\varphi_n(y)\,dy. \tag{5}$$

Questa equazione fornisce la diseguaglianza

$$c_n^2(x) \leq \int_0^\pi u^2(x, y)\,dy \tag{6}$$

che limita i c_n mediante la norma L_2 di u.

Supponiamo che u, u_y, u_{yy} siano continue fin sul contorno di S. Allora

$$c_n''(x) = \int_0^\pi u_{xx}(x, y)\,\varphi_n(y)\,dy = -\int_0^\pi (u_{yy} + ku)\,\varphi_n(y)\,dy \tag{7}$$

che, dopo due integrazioni per parti, fornisce:

$$c_n''(x) = [u\varphi_n'(y) - u_y\,\varphi_n(y)]_0^\pi - \int_0^\pi u\,(\varphi_n''(y) + k\varphi_n(y))\,dy. \tag{8}$$

Poiché φ_n e u soddisfano le stesse condizioni al contorno su $y = 0$ e $y = \pi$, la quantità fra parentesi quadre è nulla. Inoltre, poiché $\varphi_n''(y) + \lambda\varphi_n(y) = 0$, abbiamo, per c_n, l'equazione

$$c_n''(x) = (\lambda_n - k)\int_0^\pi u(x, y)\,\varphi_n(y)\,dy \tag{9}$$

o, dalla definizione (5) dei c_n

$$c_n''(x) + (k - \lambda_n) c_n(x) = 0. \tag{10}$$

Ne viene che

$$c_n(x) = a_n e^{\sqrt{\lambda_n - k}\, x} + b_n e^{-\sqrt{\lambda_n - k}\, x} \tag{11}$$

essendo a_n e b_n costanti. A seconda dei valori dei λ_n, un numero finito fra le quantità $\lambda_n - k$ possono essere negative. In questo caso, un numero finito di c_n sono della forma

$$c_n(x) = a_n \cos(\sqrt{k - \lambda_n}\, x) + b_n \sin(\sqrt{k - \lambda_n}\, x). \tag{12}$$

Ai valori positivi di $\lambda_n - k$ corrispondono i c_n in (11). Tuttavia, in forza di (2), per tutti gli n per i quali λ_n è maggiore di $A^2 + k$, abbiamo che $c_n \equiv 0$. Se vi è un λ_n tale che $\lambda_n = k$, si ha allora, per il corrispondente c_n:

$$c_n(x) = a_n x + b_n. \tag{13}$$

La dimostrazione delle proposizioni sulla forma delle soluzioni del nostro problema è ora completa.

Vogliamo considerare una più esplicita discussione per la speciale condizione al contorno $u(x, 0) = u(x, \pi) = 0$. In questo caso $\lambda_n = n^2$, $\varphi_n(y) = \sqrt{2/\pi}\sin(ny)$. Per la (2), gli unici termini esponenziali che permangono sono quelli relativi agli n (se ve ne sono) per i quali $k < n^2 < k + A^2$. Se k è il quadrato di un numero intero n_k^2, allora abbiamo in più un termine del tipo $(ax + b)\sin\sqrt{k}y$. Consideriamo ora il caso in cui vi siano indici n tali che $n^2 < k$. Allora avremo una addizionale somma finita di termini trigonometrici. Supponiamo ora che vi sia un indice n_0 con $n_0^2 > k$ e $(n_0 - 1)^2 < k$. Allora, ogni soluzione soddisfacente la (2) per $0 < A < (n_0^2 - k)^{1/2}$ è una somma trigonometrica finita. In particolare, se $1 < k < 4$, l'unica soluzione limitata di (1) è periodica in x: Se $k > 4$ e vi sono due indici n_1 ed n_2 tali che $(k - n_1^2)^{1/2}/(k - n_2^2)^{1/2}$ è irrazionale, allora ogni soluzione limitata di (1) è quasi periodica. In tal modo, noi abbiamo ottenuto, per una equazione ellittica, l'analogo di diversi fondamentali teoremi di Bohr, Bochner [6] e Amerio, che «grosso modo» affermano che, per le equazioni ordinarie e per certe iperboliche, la limitatezza della soluzione implica la quasi periodicità. Nel nostro caso è stato provato che la limitatezza di $\| u \|_{L^2}$ può essere talvolta sostituita da (2) per un opportuno $A > 0$ senza mutare la conclusione.

Osservazione. – Secondo una comunicazione del prof. Amerio, l'ipotesi di continuità di u_y e u_{yy} sul contorno di S può essere alleggerita mediante una procedura dovuta a Picone, che consiste, nel nostro caso, nel considerare l'equazione differenziale ordinaria (3) nell'intervallo $0 < \varepsilon \leq y \leq \pi - \varepsilon$. Questo, naturalmente, influenza la nostra soluzione della (10), ma un passaggio al limite per $\varepsilon \to 0$ condurrebbe al nostro risultato.

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. AMERIO, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. 28 (1960); fasc. 2, pp. 147–152 (cfr. anche il medesimo vol. fasc. 3, pp. 1–6; fasc. 4, pp. 1–6).

[2] A. WEINSTEIN, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VI, p. 259 (1927).

[3] A. WEINSTEIN, « C. R. Acad. Sci., Paris », vol. 184, p. 497 (1927).

[4] A. WEINSTEIN, « Abh. Math. Sem. Univ., Hamburg », vol. 6, pp. 263–264 (1928).

[5] P. D. LAX, « Comm. Pure Appl. Math. », vol. 10, pp. 361–389 (1957).

[6] S. BOCHNER, « Acta Math. », vol. 61, pp. 149–184 (1933).

[7] A. WEINSTEIN, « Canadian Jour. of Math. », vol. 1, pp. 271–278 (1949).