Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Rosati

Sui coefficienti di Hermite-Stieltjes di una funzione non decrescente

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 857–862.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_857_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi matematica. — *Sui coefficienti di Hermite-Stieltjes di una funzione non decrescente* (*). Nota di FRANCESCO ROSATI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. Si fa seguito ad una precedente Nota [1] (1), relativa all'analogo problema per i coefficienti di Laguerre-Stieltjes. Si stabiliscono le condizioni necessarie e sufficienti affinché un'assegnata successione $\{c_k\}$ di numeri reali sia quella dei coefficienti di Hermite-Stieltjes

$$c_k = \frac{1}{2^k\, k!\, \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{H}_k(x)\, d\alpha(x), \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1.1}$$

di una funzione $\alpha(x)$ non decrescente in $(-\infty, +\infty)$, avendo indicato con $\mathrm{H}_k(x)$ i polinomi di Hermite definiti da

$$\mathrm{H}_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k e^{-x^2}}{dx^k}, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.2}$$

Tali polinomi possono scriversi anche nella forma [2]:

$$\mathrm{H}_k(x) = k! \sum_{h=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^h (2x)^{k-2h}}{h!\,(k-2h)!}, \tag{1.2'}$$

ove $[k/2]$ indica il massimo intero contenuto in $k/2$.

Accanto ai coefficienti $\{c_k\}$ definiti da (1.1), è opportuno introdurre questi altri

$$\mu_h = h! \sum_{k=0}^{[h/2]} \frac{c_{h-2k}}{2^{2k}\, k!}, \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots); \tag{1.3}$$

risolte tali relazioni rispetto i $\{c_k\}$ si ha

$$c_k = \sum_{h=0}^{[k/2]} (-1)^h \frac{\mu_{k-2h}}{h!\,(k-2h)!\, 2^{2h}}, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots). \tag{1.4}$$

Formati con i numeri $\{\mu_h\}$, definiti da (1.3), i seguenti determinanti:

$$\mathrm{D}_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1.5}$$

si ha il seguente teorema:

(*) Lavoro del gruppo di ricerca N. 22 del C.N.R. (1961–62) eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 12 giugno 1962.

(1) I numeri tra [ ] si riferiscono alla bibliografia posta in fine.

TEOREMA I. – *Condizione necessaria e sufficiente perché una data successione* $\{c_k\}$ *di numeri reali, sia quella dei coefficienti di Hermite–Stieltjes di una funzione* $\alpha(x)$ *non decrescente in* $(-\infty, +\infty)$, *è che, costruita la corrispondente successione* $\{\mu_h\}$ *data da* (1.3), *la successione dei determinanti*

$$D_0, D_1, \cdots, D_n, \cdots$$

goda di una delle due seguenti proprietà:

A) *sia formata di numeri tutti positivi;*

B) *esista un intero positivo* N *tale da aversi*

$$D_0 > 0 \quad , \quad D_1 > 0, \cdots, D_{N-1} > 0 \quad , \quad D_N = D_{N+1} = D_{N+2} = \cdots = 0.$$

Indicata con $\alpha(x)$ una soluzione del problema avente valore prefissato in un punto, si può precisare che: *nel caso* A) *il problema è indeterminato, cioè può avere più di una soluzione, tra esse non c'è alcuna funzione a scala con un numero finito di salti; nel caso* B) *il problema è determinato e l'unica sua soluzione è una funzione a scala con* N *salti.*

2. Onde pervenire alla dimostrazione del teorema I del n. 1, premettiamo il seguente che muta il problema definito da (1.1) in uno equivalente.

TEOREMA I. – *Tutte e sole le soluzioni* $\alpha(x)$ *del problema definito da* (1.1) *sono anche soluzioni di quello determinato da*

$$\mu_h = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^h \, d\alpha(x), \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.1}$$

con la successione $\{\mu_h\}$ *definita da* (1.3).

Dimostrazioue. – Supposta $\alpha(x)$ verificante le (1.1), dalle (1.2') e (1.4) risulta, per ogni $k \geq 0$

$$\sum_{h=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^h \mu_{k-2h}}{h!(k-2h)!\,2^{2h}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} k! \sum_{h=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^h (2x)^{k-2h}}{h!(k-2h)!\,2^k k! \sqrt{\pi}} \, d\alpha(x) =$$

$$\sum_{h=0}^{[k/2]} \frac{(-1)^h}{h!(k-2h)!\,2^{2h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^{k-2h} \, d\alpha(x),$$

onde per l'arbitrarietà di k ne segue $\mu_h = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^h \, d\alpha(x)$, cioè le (2.1).

D'altra parte, osservato che dalle (1.2') si ha (2)

$$x^h = h! \sum_{k=0}^{[h/2]} \frac{H_{h-2k}(x)}{2^h k!(h-2k)!}, \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots).$$

(2) Tali formule si ricavano immediatamente appena si osservi che nelle (1.2') figurano a secondo membro solo potenze pari della x se k è pari, dispari nel caso opposto.

tenuto conto delle (1.3), essendo valide le (2.1) deve risultare

$$h!\sum_{k=0}^{[h/2]}\frac{c_{h-2k}}{2^{2k}\cdot k!}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} h!\sum_{k=0}^{[h/2]}\frac{H_{h-2k}(x)}{2^{2k}\,k!\,(h-2k)!\,2^{h-2k}}\cdot e^{-x^2}\,d\alpha(x)=$$

$$h!\sum_{k=0}^{[h/2]}\frac{1}{2^{2k}\,k!}\cdot\frac{1}{2^{k-2k}(h-2k)!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,H_{h-2k}(x)\,d\alpha(x),$$

onde per l'arbitrarietà di h, confrontando il primo membro con l'ultimo, risultano necessariamente verificate le (1.1).

La risoluzione del problema definito da (2.1), che diremo problema generalizzato dei momenti rispetto alla funzione peso e^{-x^2}, risulterà da quanto esposto nel successivo n. 3.

3. Data una successione di numeri reali $\{b_h\}$, si vuole esaminare il problema della determinazione, in $(-\infty, +\infty)$ di una funzione non decrescente $\beta(x)$, per cui risulti

$$b_h=\int_{-\infty}^{+\infty} x^h g(x)\,d\beta(x), \qquad (h=0, 1, 2\cdots), \tag{3.1}$$

essendo $g(x)\in C(-\infty, +\infty)$ una assegnata funzione positiva, potendo anche essere infinitesima o infinita per $x\to\infty$.

Costruita la successione di determinanti del tipo (1.5)

$$\mathfrak{D}_n=\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n+1} & \cdots & b_{2n}\end{vmatrix}, \qquad (n=0, 1, 2\cdots), \tag{3.2}$$

si ha il seguente teorema:

TEOREMA I. – *Condizione necessaria e sufficiente perché per un'assegnata successione* $\{b_h\}$ *esista in* $(-\infty, +\infty)$ *una funzione* $\beta(x)$ *non decrescente, verificante le* (3.1), *è che la successione dei* $\mathfrak{D}_n$ *goda di una delle due seguenti proprietà:*

A) *sia formata da numeri tutti positivi;*

B) *esista un intero* N *tale da aversi*

$$\mathfrak{D}_0>0\ ,\ \mathfrak{D}_1>0,\cdots,\mathfrak{D}_{N-1}>0\ ,\ \mathfrak{D}_N=\mathfrak{D}_{N+1}=\mathfrak{D}_{N+2}=\cdots=0.$$

Assegnato il valore di $\beta(x)$ in un qualsiasi punto dell'asse reale, si può precisare che: *nel caso* A) *il problema può avere più di una soluzione, tra esse non vi è però alcuna funzione a scala con un numero finito di salti; nel caso* B) *esiste una sola soluzione data da una funzione a scala con* N *salti.*

Dimostrazione. – Per la necessità si osservi che le (3.1) possono scriversi anche nella forma

$$b_h = \lim_{\substack{\Lambda \to +\infty \\ \lambda \to -\infty}} \int_{\lambda}^{\Lambda} x^h g(x)\, d\beta(x), \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3.3}$$

Introdotta allora la funzione

$$F(x) = c + \int_a^x g(t)\, d\beta(t), \tag{3.4}$$

essendo a un qualsiasi punto in $(-\infty, +\infty)$, risulta (vedi [3]),

$$b_h = \lim_{\substack{\Lambda \to +\infty \\ \lambda \to -\infty}} \int_{\lambda}^{\Lambda} x^h\, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^h\, dF(x), \quad (h = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3.5}$$

Dalla (3.4) per la positività di $g(x)$, segue ovviamente la non decrescenza di $F(x)$ da quella di $\beta(x)$. La successione dei $\{b_h\}$ può dunque pensarsi come quella dei momenti della $F(x)$ in $(-\infty, +\infty)$. Rilevato che se $\beta(x)$ è una funzione a scala con un numero finito N di salti, $p_1, p_2, \cdots, p_N$ nei punti $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$, lo è pure la $F(x)$, con i salti $q_1, q_2, \cdots, q_N$ nei medesimi punti, avendo posto $q_i = p_i g(\xi_i)$; al contrario, se $\beta(x)$ non ha un numero finito di salti, tale risulta anche la $F(x)$. In entrambi i casi la teoria del classico problema dei momenti (vedi [4]) applicata alle (3.5) impone immediatamente ai determinanti (3.2) di verificare i casi A) o B) del teorema.

Per la sufficienza, si rilevi che appena i $\{b_h\}$ sono tali che i determinanti $\{\mathfrak{D}_n\}$ verifichino uno dei due casi del teorema, è sempre possibile (vedi [5]) risolvere il seguente problema dei momenti

$$b_h = \int_{-\infty}^{+\infty} x^h\, d\psi(x), \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots), \tag{3.6}$$

con $\psi(x)$ non decrescente, con $\psi(-\infty) = 0$ e $\psi(+\infty) = b_0$, potendo risultare $\psi(x)$ indeterminata nel caso A), ma non a scala con un numero finito di salti; determinata a scala con un numero finito N di salti nel caso B). Rispetto tale $\psi(x)$ esiste allora il seguente integrale indefinito nel senso di Stieltjes.

$$\beta(x) = c + \int_a^x g(t)^{-1}\, d\psi(t), \qquad \text{per} \quad x \in (-\infty, +\infty). \tag{3.7}$$

Per le ipotesi fatte su $g(x)$, tale $\beta(x)$ risulta necessariamente non decrescente, indeterminata o determinata se così è la $\psi(x)$. Secondo che la $\psi(x)$ risulti a scala con un numero finito o no di salti, tale risulta anche la $\beta(x)$: ai salti $q_1, q_2, \cdots, q_N$ nei punti $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$ relativi alla $\psi(x)$ corrispondono quelli

$p_1, p_2, \cdots, p_N$, nei medesimi punti, relativi alla $\beta(x)$, essendo $p_i = q_i/g(\xi_i)$. Per ogni coppia $\lambda \leq \Lambda$ e per ogni valore di h si ha quindi

$$\int_\lambda^\Lambda x^h \, d\psi(x) = \int_\lambda^\Lambda x^h g(x) \, d\beta(x).$$

L'integrale a primo membro, per $\Lambda \to +\infty$, $\lambda \to -\infty$, ammette limite finito b_h dato da (3.6); esiste necessariamente anche il limite dell'integrale a secondo membro con il medesimo valore b_h. Si ha in definitiva

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^h g(x) \, d\beta(x) = b_h, \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots),$$

onde la $\beta(x)$ definita da (3.6) è la richiesta soluzione del problema (3.1), verificandosi per essa, per quanto richiamato sulla corrispondenza delle proprietà di $\psi(x)$ e $\beta(x)$, uno dei due casi del teorema.

4. Dal teorema ora dimostrato, segue immediatamente l'analogo teorema I del n. 2, non appena, nelle considerazioni svolte si ponga $g(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}$, e si identifichino i $\{b_h\}$ relativi alle (3.1) con i $\{\mu_h\}$ dati da (2.1).

La richiesta soluzione di (2.1), che indicheremo con $\alpha(x)$, ha allora la forma

$$\alpha(x) = c + \sqrt{\pi} \cdot \int_a^x e^{t^2} \, d\psi(t), \tag{4.1}$$

ove la $\psi(x)$ è soluzione, determinata o no, a scala o no, del problema definito da

$$\mu_h = \int_{-\infty}^{+\infty} x^h \, d\psi(x), \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots). \tag{4.2}$$

Tale $\alpha(x)$ per quanto stabilito nel citato teorema di equivalenza del n. 2, è pure soluzione del problema definito da (1.1), onde per quanto precede, il relativo teorema è completamente dimostrato.

Per tutto ciò che riguarda la costruzione effettiva della $\psi(x)$ individuata da (4.2), a partire dagli assegnati μ_h, e per i casi di indeterminazione che possono presentarsi si può vedere per esempio [4]. In questo lavoro interessava notare come la risoluzione del problema dei momenti in senso classico fosse legata a quello generalizzato.

Osserviamo anche che nel problema (1.1) il peso e^{-x^2} può essere sostituito, come spesso accade, con il peso $e^{-x^2/2}$. Tutto quanto stabilito si applica immediatamente anche a tale caso; più precisamente, posto

$$c_k^* = \frac{1}{2^k \, k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \, H_n(x) \, d\gamma(x), \qquad (h = 0, 1\ 2, \cdots), \tag{4.3}$$

si studia il problema equivalente

$$\mu_h^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} x^h \, d\gamma(x) , \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots), \tag{4.4}$$

ove i $\{c_k^*\}$ e i $\{\mu_h^*\}$ sono legati ancora dalle relazioni (1.3) e (1.4), sostituiti che siano c_k e μ_h con c_k^* e μ_h^*. Per la $\gamma(x)$ stante la (3.7) si ottiene

$$\gamma(x) = c + \sqrt{\pi} \int_a^x e^{t^2/2} \, d\psi^*(t) \tag{4.5}$$

essendo $\psi^*(t)$ la soluzione determinata o no, a scala o no, di

$$\mu_h^* = \int_{-\infty}^{+\infty} x^h \, d\psi^*(x) , \qquad (h = 0, 1, 2, \cdots). \tag{4.6}$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] F. ROSATI, *Sui Coefficienti di Laguerre-Stieltjes di una funzione non decrescente*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », vol. XXXII (1962).
[2] ERDÉLYI, MAGNUS, OBERHETTINGER, TRICOMI, *Higher Trascendental Function*, vol. II, p. 193, McGraw-Hill, New York 1953.
[3] N. GUNTHER, *Sur les intégrales de Stieltjes*, Chelsea Publ. Comp., New. York 1949.
[4] J. A. SHOHAT and J. D. TAMARKIN, *The problem of moments*, « Am. Math. Soc. » (1943).
[5] A. GHIZZETTI, *Sul problema dei momenti*, « Rend. Sem. Mat. Torino », vol. 8, pp. 94–101 (1949).