ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ROSARIO MUSMECI

Estensione di un teorema sull'esistenza di un insieme di perimetro minimo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 32 (1962), n.6, p. 852–856.

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_852_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Estensione di un teorema sull'esistenza di un insieme di perimetro minimo.* Nota di ROSARIO MUSMECI, presentata (*) dal Socio E. TOGLIATTI.

PRELIMINARI.

Dato uno spazio euclideo S_r , il cui punto generico indicheremo con $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, e dato un numero reale $\lambda > 0$, per ogni $f(x)$ definita in S_r ed ivi limitata intendiamo

$$W_\lambda f(x) = (\pi\lambda)^{-r/2} \int_{S_r} e^{-|x-\xi|^2/\lambda} f(\xi) d\xi$$

dove abbiamo posto

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \quad |\xi| = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_r^2.$$

Si dimostra (vedi [1]) che l'integrale

$$\int_{S_r} |\text{grad } W_\lambda f(x)| dx_1 \cdots dx_r$$

è una funzione non crescente di λ , onde esiste il

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{S_r} |\text{grad } W_\lambda f(x)| dx_1 \cdots dx_r.$$

Dato un insieme $E \subset S_r$ e detta $\varphi(x, E)$ la sua funzione caratteristica, si definisce il perimetro (secondo De Giorgi) di E , e si indica $P(E)$, ponendo

$$P(E) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{S_r} |\text{grad } W_\lambda \varphi(x, E)| dx_1 \cdots dx_r.$$

1. È noto (vedi per esempio [3]) che

TEOREMA. — Dato un insieme E di perimetro finito e un insieme limitato L (di Borel), nella famiglia degli insiemi B che verificano la condizione

$$B - L = E - L$$

ne esiste uno di perimetro minimo, cioè esiste un insieme $\bar{B}$ tale che

$$\bar{B} - L = E - L, \quad P(\bar{B}) = \text{estr. inf. } \{P(B) : B - L = E - L\}.$$

Dimostro qui la proposizione analoga nell'ipotesi di L illimitato.

2. Per tale dimostrazione faccio uso di 4 teoremi contenuti in [1], [2] di cui richiamo qui gli enunciati.

(*) Nella seduta del 12 giugno 1962.

TEOREMA I. — Se $\{E_n\}$ è una successione di insiemi che converge in media ⁽¹⁾ verso un insieme E, si ha

$$P(E) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n).$$

TEOREMA II. — Dato un insieme $E \subset S_r$ ($r \geq 2$) di perimetro finito, il suo perimetro $P(E)$ è uguale al minimo limite dei perimetri di domini poligonalι π che approssimano in media E; si ha cioè

$$\lim_{\pi \rightarrow E} P(\pi) = P(E).$$

TEOREMA III. — Dato un insieme $E \subset S_r$ ($r \geq 2$) se E ha perimetro finito risulta verificata una delle due relazioni

$$\text{mis } E \leq [P(E)]^{r/r-1}$$

$$\text{mis } CE \leq [P(E)]^{r/r-1}.$$

TEOREMA IV. — Una famiglia di insiemi di perimetri equilimitati e tutti contenuti in uno stesso insieme limitato H è compatta (rispetto alla convergenza in media), cioè data una successione $\{E_n\}$ tale che $P(E_n) < k$ e $E_n \subset H$ allora esiste una successione $\{E_{h_i}\}$ estratta dalla $\{E_n\}$ tale che $\{E_{h_i}\}$ converge in media verso un insieme E.

3. Dimostriamo ora il

TEOREMA. — Dato un insieme E di perimetro finito e un insieme illimitato L (di Borel), nella famiglia degli insiemi B che verificano la condizione

$$B - L = E - L$$

ne esiste uno di perimetro minimo, cioè esiste $\bar{B}$ tale che

$$\bar{B} - L = E - L \quad , \quad P(\bar{B}) = \text{estr. inf. } \{P(B) : B - L = E - L\}.$$

Dimostrazione. — Posto

$$\lambda = \text{estr. inf. } \{P(B) : B - L = E - L\}$$

scegliamo una successione di insiemi B_h tali che

$$(1) \quad B_h - L = E - L \quad , \quad \lim_{h \rightarrow \infty} P(B_h) = \lambda \quad , \quad P(B_h) \leq P(E),$$

$$\text{mis } B_h \leq [P(E_h)]^{r/r-1} \quad (2).$$

(1) Dire che la successione $\{E_n\}$ converge in media verso E vuol dire che dette c_{E_n}, c_E rispettivamente le funzioni caratteristiche di E_n ed E, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_r} |c_E - c_{E_n}| dx_1 \dots dx_r = 0.$$

(2) Ove non fosse possibile scegliere i B_h tali che

$$\text{mis } B_h \leq [P(E)]^{r/r-1}$$

Sia Q_n il quadrato di centro l'origine e lato n , si ha

$$(2) \quad B_h \cap Q_1 \subset Q_1$$

$$(3) \quad P(B_h \cap Q_1) \leq P(B_h) + P(Q_1) \leq P(E) + P(Q_1).$$

Le (2), (3) ci assicurano che la successione $\{B_h \cap Q_1\}$ si trova nelle ipotesi del teorema IV onde da essa se ne può estrarre una convergente. Sia $\{B_{1h} \cap Q_1\}$ una successione convergente estratta dalla $\{B_h \cap Q_1\}$. La successione

$$\{B_{1h} \cap Q_2\}$$

si trova nelle ipotesi del teorema IV onde se ne può estrarre una convergente. Sia $\{B_{2h} \cap Q_2\}$.

Procedendo in questo modo si possono costruire le successioni di insiemi (ciascuna estratta dalla precedente)

$$\{B_{1h}\}, \quad \{B_{2h}\}, \dots, \{B_{kh}\}, \dots$$

tali che le successioni

$$\{B_{kh} \cap Q_k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

convergono in media. Allora la successione

$$\{B_{nn} \cap Q_p\}$$

sarà convergente per ogni intero p .

Poniamo

$$(4) \quad B_n^* = B_{nn} \quad , \quad \lim_{r \rightarrow \infty} B_r^* \cap Q_p = B^p \quad , \quad \bar{B} = \bigcup_{p=1}^{\infty} B^p$$

(si noti che il limite è inteso nel senso della convergenza in media) e dimostriamo che $\bar{B}$ verifica le condizioni del teorema.

Poiché

$$\bar{B} - L = E - L \Rightarrow P(\bar{B}) \geq \lambda$$

basterà provare che

$$a) \quad \bar{B} - L = E - L$$

$$b) \quad P(\bar{B}) \leq \lambda.$$

La *a*) segue immediatamente dalle (1), (4).

Per dimostrare la *b*) osserviamo che risulta

$$(5) \quad P(B_r \cap Q_p) \leq P(B_r).$$

sarebbe possibile in base al teorema III, sceglierli tali che

$$\text{mis } CB_h \leq [P(E)]^{r/r-1}$$

e poiché ovviamente si ha

$$B_h - L = E - L \Leftrightarrow CB_h - L = CE - L$$

si potrebbe ragionare sulla successione $\{CB_h\}$ giungendo ad un insieme il cui complementare soddisferebbe alle condizioni richieste dal teorema.

Infatti se $\{\pi_n\}$ è una successione di domini poligonalì di misura finita che convergono (in media) a B_r , e verificano la condizione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\pi_n) = P(B_r),$$

per ogni n risulta

$$P(\pi_n \cap Q_\rho) \leq P(\pi_n) \quad (3)$$

da cui, per i teoremi I e II,

$$P(B_r \cap Q_\rho) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\pi_n \cap Q_\rho) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(\pi_n) = P(B_r).$$

Dalla (5) si ha

$$(6) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} P(B_r \cap Q_\rho) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} P(B_r) = \lambda$$

e in virtù del teorema I

$$P(B^\rho) \leq \lim_{r \rightarrow \infty} P(B_r \cap Q_\rho)$$

e per la (6)

$$(7) \quad P(B^\rho) \leq \lambda$$

da cui

$$(8) \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} P(B^\rho) \leq \lambda.$$

Gli insiemi B^ρ hanno perimetri equilimitati (per la (7)) e inoltre sono tutti limitati, quindi in base al teorema III si ha

$$(9) \quad \text{mis } B^\rho \leq [P(B^\rho)]^{r/r-1} \leq \lambda^{r/r-1}$$

cioè gli insiemi B^ρ sono di misure equilimitate.

Essendo $\{B^\rho\}$ una successione crescente si ha

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} B^\rho = \bigcup_{\rho=1}^{\infty} B^\rho = \bar{B}$$

e quindi, ricordando la (9),

$$\text{mis } \bar{B} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \text{mis } B^\rho, \quad \text{mis } (\bar{B} - B^\rho) = \text{mis } \bar{B} - \text{mis } B^\rho$$

cioè si ha la convergenza in media della successione $\{B^\rho\}$ verso $\bar{B}$.

(3) Per la relazione

$$P(\pi_n \cap Q_\rho) \leq P(\pi_n)$$

si noti che poiché, come è facile verificare, il perimetro secondo De Giorgi dei domini poligonalì coincide con la misura elementare della frontiera è evidente che se π è un dominio poligonale di misura finita e S un semispazio si ha

$$P(\pi \cap S) \leq P(\pi)$$

da ciò segue che se Q è un quadrato è

$$P(\pi \cap Q) \leq P(\pi).$$

Allora, per il teorema I,

$$P(\bar{B}) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} P(B^p)$$

e per la (8)

$$P(\bar{B}) \leq \lambda.$$

C. v. d.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] E. DE GIORGI, *Su una teoria generale della misura $r-1$ -dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, « Annali di Matematica pura ed applicata », serie IV, tomo XXXVI (1954).
- [2] E. DE GIORGI, *Nuovi teoremi relativi alle misure $r-1$ -dimensionali in uno spazio ad r dimensioni*, « Ricerche di Matematica », vol. IV (1955).
- [3] E. DE GIORGI, *Frontiere orientate di misura minima*. Editrice tecnico scientifica, Pisa 1961.