Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Silvio Cinquini

Ancora sopra l'esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali estesi a intervalli infiniti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 845–851.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_845_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Ancora sopra l'esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali estesi a intervalli infiniti.* Nota di SILVIO CINQUINI, presentata [*] dal Socio G. SANSONE.

In una recente Nota [1] sono ritornato sul problema (che avevo impostato alcuni anni fa [2]) dell'esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali estesi a intervalli infiniti

$$\mathrm{I}_{\mathrm{C}(+\infty)} = \int_a^{+\infty} f(x\,, y(x)\,, y'(x))\, dx\,.$$

Come ho ricordato in N. I, tale problema ha formato oggetto di un ampio studio da parte di S. Faedo (il quale ne ha fatto applicazione alla sistemazione teorica del metodo variazionale di M. Picone), anche quando l'integrale dipende da più funzioni e dalle loro derivate di ordine superiore. In particolare desidero citare quei risultati che sono stati raggiunti, usufruendo abilmente di condizioni già introdotte nel Calcolo delle variazioni e che, talvolta, sono state raffinate in modo opportuno; a tale ordine di idee appartengono parecchi notevoli teoremi stabiliti dal Faedo [3] e anche quello contenuto in N. I.

Nelle presenti righe considero il caso (sul quale mai mi sono soffermato), in cui l'integrale dipende dalle derivate di ordine superiore

$$\mathrm{I}^{[n]}_{\mathrm{C}(+\infty)} = \int_a^{+\infty} f(x\,, y(x)\,, y'(x)\,, \cdots, y^{(n)}(x))\, dx\,,$$

e rilevo qualche altra proposizione per mostrare mediante esempi (in prosieguo di quanto ho fatto in N. I), come sia efficace, nonostante la disuguaglianza (1) (vedi n. 1), l'ordine di idee seguito [4].

(*) Nella seduta del 12 giugno 1962.

(1) S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali estesi a intervalli infiniti*, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », vol. XXXII, pp. 320–25 (1962). Questa Nota nel seguito verrà indicata con N. I.

(2) Vedi S. CINQUINI, luoghi cit., in (1) di N. I.

(3) S. FAEDO, *Il Calcolo delle variazioni per gli integrali su un intervallo infinito*, «Comm. Pontificia Acad. Scientiarum », vol. VIII, n. 13, pp. 319–421 (1944). In particolare Cap. II, § 2, pp. 339–51.

(4) Per le generalità rinviamo al n. 1 della nostra Nota citata per prima in (1) di N. I. Vedi anche S. FAEDO, luogo cit. in (3), n. 1, p. 320.

1. TEOREMA I. – *Siano verificate le seguenti ipotesi:*

1ª *In tutti i punti* $(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *del campo* $A^{[n]}$ *è* $x \geq 0$ [5], *ed anche per qualunque valore finito di* $y^{(n)}$

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) \geq \Psi(x), \tag{1}$$

ove $\Psi(x)$ *è una funzione definita e continua per* $x \geq 0$ *e tale che esista finito l'integrale generalizzato* $\int_0^{+\infty} \Psi(x)\, dx$.

2ª $I^{[n]}_{C(+\infty)}$ *è un integrale quasi regolare positivo.*

3ª *In ogni punto* $(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *del campo* $A^{[n]}$ *è*

$$\lim_{|y^{(n)}| \to \infty} \left| \frac{f(x, y, y', \cdots, y^{(n)})}{y^{(n)}} \right| = \infty .$$

4ª *In corrispondenza a ogni numero* $u > 0$ *esistono due numeri* $\lambda > 0$, N *e una funzione* $\Phi(y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *definita per ogni n–pla* $(y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *con* $y^2 + y'^2 + \cdots + [y^{(n-1)}]^2 \geq \lambda^2$, *differenziabile e tale che per* $y^2 + y'^2 + \cdots + [y^{(n-1)}]^2 \to \infty$ *sia* $\lim |\Phi(y, y', \cdots, y^{(n-1)})| = \infty$, *in modo che in tutti i punti* $(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ *del campo* $A^{[n]}$, *nei quali è* $0 \leq x \leq u$, $y^2 + y'^2 + \cdots + [y^{(n-1)}]^2 \geq \lambda^2$, *risulti*

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) + N \geq$$

$$\geq \left| y' \frac{\partial \Phi(y, y, \cdots, y^{(n-1)})}{\partial y} + y'' \frac{\partial \Phi(\cdots)}{\partial y'} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial \Phi(\cdots)}{\partial y^{(n-1)}} \right|$$

per tutti gli $y^{(n)}$ *che verificano la disuguaglianza*

$$\left| y' \frac{\partial \Phi(y, y' \cdots, y^{(n-1)})}{\partial y} + y'' \frac{\partial \Phi(\cdots)}{\partial y'} + \cdots + y^{(n)} \frac{\partial \Phi(\cdots)}{\partial y^{(n-1)}} \right| \geq 1 .$$

Allora esiste il minimo assoluto di

$$I^{[n]}_{C(+\infty)} = \int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x))\, dx$$

in ogni classe $K^{[n]}$ *di curve* $C^{(+\infty)}$: $y = y(x)$, $(a \leq x < +\infty)$, *appartenenti al campo* $A^{[n]}$, *la quale sia completa di ordine n al finito e tale che per ogni curva della classe ci sia almeno un punto* $(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n-1)}(x))$ *appartenente a un dato insieme* $A^{[n]}_{*}$ *limitato e chiuso.*

Infatti, come si è visto al n. 2 di N. I, in virtù dell'ipotesi 1ª esiste finito il limite inferiore di $I^{[n]}_{C(+\infty)}$ in ogni classe $K^{[n]}$ di curve $C^{(+\infty)}$ soddisfacenti alle condizioni indicate, e possiamo senz'altro supporre che sia $\Psi(x) = 0$ e quindi $i \geq 0$.

(5) Anche qui è ovvio che ciò non costituisce una restrizione.

Allora, considerata una successione di curve

$$C_r^{(+\infty)}: \qquad y = y_r(x), \qquad (a_r \leq x < +\infty)$$

$(r = 1, 2, \cdots)$, estratta da $K^{[n]}$ e minimizzante $I^{[n]}_{C^{(+\infty)}}$, tale cioè che sia $I^{[n]}_{C_r^{(+\infty)}} \leq i + \frac{1}{r}$, in corrispondenza a ogni numero u del tutto arbitrario, purché maggiore del massimo valore di x nei punti dell'insieme $A^{[n]}_*$, essendo a maggior ragione

$$\int_{a_r}^{u} f(x, y_r(x), y'_r(x), \cdots, y_r^{(n)}(x))\, dx \leq i + \frac{1}{r}, \qquad (r = 1, 2, \cdots),$$

in base all'ipotesi 4ª si può determinare un numero $V(u) > 0$, in modo che, per qualunque curva della successione minimizzante considerata, in tutto il rispettivo intervallo (a_r, u) sia verificata la disuguaglianza [6]

$$\sqrt{y_r^2(x) + y_r'^2(x) + \cdots + [y_r^{(n-1)}(x)]^2} \leq V(u).$$

Successivamente basta estendere in modo del tutto naturale il procedimento sviluppato per $n = 1$ [7] tenendo presente che, in corrispondenza a ogni u, il campo limitato $A^{[n]}_u$ è costituito da quei punti di $A^{[n]}$, nei quali è

$$0 \leq x \leq u \quad , \quad \sqrt{y^2 + y'^2 + \cdots + [y^{(n-1)}]^2} \leq V(u).$$

2. ESEMPIO. – Alle ipotesi del teorema I soddisfa la seguente funzione. Sia, per $n = 2$,

$$f(x, y, y', y'') = \frac{\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y''^2 - y - y''}{1 + x^\alpha + 5y^2 + 7y'^2},$$

con $x \geq 0$, $\alpha > 1$.

È evidente che sono verificate le condizioni 2ª e 3ª. Essendo $y \leq \frac{1}{4} y^2 + 1$, $y'' \leq \frac{1}{12} y''^2 + 3$, risulta

$$(2) \qquad f \geq \frac{\frac{1}{4}(y^2 + y''^2) - 4}{1 + x^\alpha + 5y^2 + 7y'^2},$$

e quindi anche $f \geq \frac{-4}{1 + x^\alpha}$, vale a dire è verificata la condizione 1ª. Inoltre, siccome dalla (2) segue in modo ovvio

$$f + 4 \geq \frac{1}{4} \frac{y^2 + y''^2}{1 + x^\alpha + 5y^2 + 7y'^2} \geq \frac{1}{4} \frac{y^2 + y''^2}{1 + x^\alpha + 7(y^2 + y'^2)},$$

(6) Cfr. S. CINQUINI, luogo cit. in (6) di N. I, n. 12, p. 186.

(7) Cfr. N. I, n. 2, e anche S. CINQUINI, luogo cit. per primo in (1) di N. I, n. 2, p. 256.

per $0 \leq x \leq u$ risulta

$$f + 4 \geq \frac{1}{4} \frac{y^2 + y''^2}{1 + u^\alpha + 7(y^2 + y'^2)},$$

e anche per $7(y^2 + y'^2) \geq 1 + u^\alpha$

$$f + 4 \geq \frac{1}{56} \frac{y^2 + y''^2}{y^2 + y'^2} \geq \frac{1}{112} \frac{(yy' + y'y'')^2}{(y^2 + y'^2)^2},$$

da cui segue

$$f + 4 \geq \frac{1}{4\sqrt{7}} \frac{|yy' + y'y''|}{y^2 + y'^2}$$

per $\frac{1}{4\sqrt{7}} \frac{|yy' + y'y''|}{y^2 + y'^2} \geq 1$, vale a dire è sicuramente verificata la condizione 4^a per $\Phi(y, y) \equiv \frac{1}{8\sqrt{7}} \lg(y^2 + y'^2)$, $\lambda = \sqrt{1 + \frac{u^\alpha}{7}}$.

3. TEOREMA II. – *Siano verificate, insieme con le ipotesi 1^a, 2^a e 3^a dell'enunciato del n. 1, le seguenti:*

5^a *In corrispondenza a ogni numero $u > 0$ esistono due numeri $\lambda > 0$, N e una funzione $\varphi(t)$ definita per $|t| > \lambda$, continua, non negativa e tale che sia*

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \varphi(t)\,dt = +\infty \quad , \quad \int_{-\infty}^{-\lambda} \varphi(t)\,dt = +\infty ,$$

in modo che in tutti i punti $(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ del campo $A^{[n]}$ con $0 \leq x \leq u$, $|y^{(n-1)}| \geq \lambda$ sia

$$f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) + N \geq |y^{(n)}| \, \varphi(y^{(n-1)})$$

per tutti gli $y^{(n)}$ che verificano la disuguaglianza $|y^{(n)}| \, \varphi(y^{(n-1)}) \geq 1$.

6^a *Esistono un numero intero non negativo $m < n$ e un numero $H > 0$ in modo che, indicato con $A_H^{[n]}$ il campo costituito da quei punti di $A^{[n]}$ nei quali è $x \leq H$, risulti*

$$\lim_{|y^{(m)}| \to \infty} f(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = +\infty$$

uniformemente al variare di $x, y, y', \cdots, y^{(m-1)}, y^{(m+1)}, \cdots, y^{(n-1)}$ in $A_H^{[n]}$ e di $y^{(n)}$ in $(-\infty, +\infty)$.

7^a $K^{[n]}$ *è una classe di curve $C^{(+\infty)}: y = y(x)$, $(a \leq x < +\infty)$ completa di ordine n al finito e tale che:*

(i) *esiste un numero $H_0 < H$ in modo che per qualunque curva di $K^{[n]}$ è $a \leq H_0$;*

(ii) *esiste un numero $L > 0$ tale che, in corrispondenza a ciascuna curva di $K^{[n]}$ ci sono m valori x_j, $(j = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$ (distinti o no), per i quali sono verificate le disuguaglianze*

$$x_j \leq L \quad , \quad |y^{(j)}(x_j)| \leq L , \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, m-1 ; \; y^{(0)} \equiv y).$$

Allora nella classe $K^{[n]}$ esiste il minimo assoluto di $I^{[n]}_{C^{(+\infty)}}$.

Per stabilire il teorema enunciato riprendiamo le considerazioni iniziali della dimostrazione del n. 1. Allora in virtù delle ipotesi 6ª e 7ª (i) si può determinare un numero $L_m > 0$ tale che, considerata una curva qualunque della successione minimizzante (indicata al n. 1) e suddiviso il rispettivo intervallo (a_r, H) in $2(n-m)-1$ parti uguali, ci sono $n-m$ valori $x'_{m+1} < x'_{m+2} < \cdots < x'_n$ (che dipendono dalla curva considerata e che appartengono al rispettivo intervallo (a_r, H)), per i quali sono verificate le disuguaglianze

$$|y_r^{(m)}(x'_j)| \leq L_m, \qquad (j = m+1, m+2, \cdots, n),$$

$$x'_{j+1} - x'_j \geq \frac{H - H_0}{2(n-m)-1}, \qquad (j = m+1, m+2, \cdots, n-1);$$

pertanto possiamo affermare che c'è un numero $L' \geq L_m$ (dipendente soltanto dalla successione minimizzante considerata) tale che esistono $n-m$ valori (distinti o no) x_j, ($j = m, m+1, \cdots, n-1$; con $x_m \equiv x'_{m+1}$), (che dipendono dalla curva considerata e che appartengono al rispettivo intervallo (a_r, H)), per i quali risulta

$$(3) \qquad |y_r^{(m)}(x_m)| \leq L', \quad |y_r^{(m+1)}, (x_{m+1})| \leq L', \cdots, |y_r^{(n-1)}(x_{n-1})| \leq L'.$$

Ciò premesso, considerato un numero u del tutto arbitrario, purché maggiore di H e di L, in base all'ipotesi 5ª e all'ultima delle (3), si può determinare (analogamente a quanto si è visto in N. I) un numero $v_{n-1}(u)$ tale che, qualunque sia la curva della successione minimizzante considerata, in tutto il rispettivo intervallo (a_r, u) sia verificata la disuguaglianza

$$|y_r^{(n-1)}(x)| \leq v_{n-1}(u);$$

allora tenendo conto delle prime $n-m-1$ disuguaglianze (3) e dell'ipotesi 7ª (ii) si prova, successivamente, che esistono $n-1$ numeri $v_{n-2}(u)$, $v_{n-3}(u), \cdots, v_0(u)$, per i quali risulta

$$|y_r^{(n-2)}(x)| \leq v_{n-2}(u), \cdots, |y'_r(x)| \leq v_1(u) \quad , \quad |y_r(x)| \leq v_0(u)$$

nel rispettivo intervallo (a_r, u).

Infine si conclude come al n. 1, indicando con $A_u^{[n]}$ il campo limitato costituito da quei punti di $A^{[n]}$, nei quali è

$$x \leq u \quad , \quad |y| \leq v_0(u) \quad , \quad |y'| \leq v_1(u), \cdots, |y^{(n-1)}| \leq v_{n-1}(u).$$

4. OSSERVAZIONI. – *a*) Se è $m = 0$, l'ipotesi 7ª (ii) va soppressa.

In particolare, per $n = 1$, è necessariamente $m = 0$, e quindi tale ipotesi va eliminata.

b) D'altra parte, se fosse $m = n$, l'ipotesi 6ª diverrebbe inutile. Tuttavia il teorema II è ancora valido, sopprimendo la condizione 6ª e la 7ª (i), e supponendo che la 7ª (ii) sia verificata per $m = n$.

In particolare, se, per $m = n$, è $n = 1$, si ritrova come caso particolare il teorema del n. 2 di N. I [8].

5. ESEMPIO. – Alle condizioni del teorema II soddisfa la seguente funzione. Sia, per $n = 3$,

$$f(x, y, y', y'', y''') = \frac{\sqrt{1+y'''^2}\,[\lg(1+y'''^2)-1]}{1+x^\alpha+\sqrt{1+y''^2}\,\lg(1+y''^2)} + \frac{\lg\lg(e+y'^2)}{\sqrt[4]{1+x^2}}$$

con $x \geq 0$, $\alpha > 1$.

È evidente che sono verificate le condizioni 2ª e 3ª. Essendo

$$\sqrt{1+y'''^2}\,\lg(1+y'''^2) \geq 2\sqrt{1+y'''^2} - 2,$$

risulta

$$f \geq \frac{\sqrt{1+y'''^2}-2}{1+x^\alpha+\sqrt{1+y''^2}\,\lg(1+y''^2)} + \frac{\lg\lg(e+y'^2)}{\sqrt[4]{1+x^2}}. \tag{4}$$

Pertanto, fissato comunque un numero $H > 0$, per $0 \leq x \leq H$ è

$$f \geq \frac{\lg\lg(e+y'^2)}{\sqrt[4]{1+H^2}} - 1,$$

vale a dire è soddisfatta la condizione 6ª per $m = 1$. È pure verificata la 1ª, perché ancora dalla (4) segue $f \geq -\dfrac{1}{1+x^\alpha}$. Infine, tenuto presente che è $\sqrt{1+y'''^2} \geq \dfrac{|y'''|+1}{\sqrt{2}}$, sempre dalla (4) si trae

$$f \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{|y'''|}{1+x^\alpha+\sqrt{1+y''^2}\,\lg(1+y''^2)} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}-2}{1+x^\alpha+\sqrt{1+y''^2}\,\lg(1+y''^2)},$$

e anche

$$f + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{|y'''|}{1+x^\alpha+\sqrt{1+y''^2}\,\lg(1+y''^2)}.$$

(8) Nel caso degli integrali I_C è stato posto in particolare rilievo (S. FAEDO, luogo cit. in (3), Cap. II, n. 4, pp. 348–49) l'esempio

$$f(x, y, y') = (y'+y)^2.$$

Quando si considerano integrali estesi a intervalli infiniti, è immediato che tale esempio rientra nel teorema del n. 2 di N. I.

Infatti è evidente che sono verificate le condizioni 1ª, 2ª, 3ª del luogo citato. Inoltre per $|y| \geq \lambda$ risulta

$$f = y^2\left(\frac{y'}{y}+1\right)^2 \geq \lambda^2\left(\frac{y'}{y}+1\right)^2 \geq \lambda^2\left[\frac{1}{2}\left(\frac{y'}{y}\right)^2-1\right],$$

da cui

$$f + \lambda^2 \geq \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\left|\frac{y'}{y}\right|,$$

per $\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}\left|\dfrac{y'}{y}\right| \geq 1$, vale a dire la condizione 4ª del luogo cit. per $\varphi(t) \equiv \dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{|t|}$.

Allora per $0 \leq x \leq u$ segue

$$f + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \, \frac{|y'''|}{1 + u^\alpha + \sqrt{1+y''^2} \lg(1+y''^2)}$$

e anche per $\sqrt{1+y''^2} \lg(1+y''^2) \geq 1 + u^\alpha$

$$f + 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \, \frac{|y'''|}{\sqrt{1+y''^2} \lg(1+y''^2)},$$

vale a dire, $z = \lambda$ essendo l'unica radice positiva dell'equazione

$$\sqrt{1+z^2} \lg(1+z^2) = 1 + u^\alpha,$$

in tutti i punti (x, y, y', y'') di $A^{[3]}$ con $0 \leq x \leq u$, $|y''| \geq \lambda$ la condizione 5ª è verificata dalla funzione $\varphi(t) \equiv \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2} \lg(1+t^2)}$ per qualunque valore di y'''.