Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Vittorio Nobile

Sulla attendibilità di alcuni dati e presupposti finora ammessi nella ricerca di una legge universale di gravitazione. Criteri per necessarie revisioni e possibilità di eventuali verifiche al riguardo

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 808–813.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_808_0¿

Astronomia. — *Sulla attendibilità di alcuni dati e presupposti finora ammessi nella ricerca di una legge universale di gravitazione. Criterî per necessarie revisioni e possibilità di eventuali verifiche al riguardo.* Nota [*] del Socio VITTORIO NOBILE.

1. È ben noto che col procedimento generalmente seguito ed esposto nei trattati di meccanica e di astronomia per mostrare come si possa dai dati di osservazione dedurre la legge newtoniana e caratterizzarla come universale si attribuisce ad un pianeta generico una accelerazione radiale diretta verso il centro del Sole: ciò in base alla seconda legge di Keplero la quale implica per la forza la detta condizione ed è, come pure la prima, da ritenersi rigorosamente valida nel caso del moto imperturbato. Passando quindi dalla espressione $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ dell'accelerazione radiale nel moto piano ad altra ottenuta con la eliminazione del tempo, a mezzo dell'integrale delle aree (formola di Binet), si perviene, dopo l'introduzione dell'equazione dell'orbita, ad una espressione in cui rimane una sola delle tre costanti che quella equazione comprende, cioè il parametro p della conica, il quale forma, insieme alla costante c della velocità areolare, l'unico termine riferibile al particolare movimento considerato. Il valore numerico di tale termine c^2/p risulta poi identico per tutti i pianeti del sistema ed è in base a tale dato che rimane attribuito al detto numero il significato di costante universale e stabilita quindi la legge di gravitazione.

Sulla predetta maniera di argomentare e di procedere si possono fare due obbiezioni di natura differente e ben sostanziali. La prima riguarda la incondizionata validità che si è creduto di potere attribuire alla terza legge di Keplero, ciò che non sembra sufficientemente giustificato in base alle sole osservazioni fatte sui movimenti effettivi dei pianeti. Quelle osservazioni sono state eseguite nel caso di movimenti ellittici evidentemente «speciali» – orbite quasi circolari e piccole inclinazioni mutue dei loro piani – e tali circostanze potrebbero far pensare che il verificarsi della relazione kepleriana pei pianeti del detto gruppo dipenda da particolari condizioni «iniziali» del moto, determinate da remote e complesse cause che abbiano operato durante il processo evolutivo in cui si è formato il sistema solare [1]. Con-

(*) Presentata nella seduta del 12 giugno 1962.

(1) Si vede propriamente come, nel caso di orbite circolari – nelle quali, per la legge delle aree, il moto orbitale è necessariamente uniforme – basti supporre che, per effetto delle cause predette, le velocità iniziali siano risultate inversamente proporzionali alle radici quadrate dei raggi delle orbite perché, con tale legge di distribuzione, si dia luogo alla terza legge kepleriana. Se indichiamo con v_i, a_i e T_i rispettivamente la velocità, il raggio dell'orbita e il periodo di rivoluzione del pianeta P_i e con λ una costante indipendente da i, si avrà infatti, in conformità della detta ipotesi:

$$v_i = \frac{2\pi a_i}{T_i} = \frac{\lambda}{\sqrt{a_i}}, \quad \text{ossia} \quad \frac{4\pi^2 a_i^3}{T_i^2} = \lambda^2 .$$

siderazioni di tal natura sono probabilmente quelle che hanno fatto sorgere qualche dubbio sul carattere di generalità assegnato alla legge in questione e hanno dato luogo a tentativi per evitare di includerla fra i dati nella ricerca della espressione definitiva della legge di gravitazione. Al medesimo scopo tendono pure, con maggiore determinatezza e con risultati conclusivi, mie successive ricerche alle quali sarà accennato più oltre insieme a nuove considerazioni.

Deve in secondo luogo essere rilevato come non si possa, in una indagine condotta con altro procedimento, escludere una ipotesi con cui si ammetta che l'intensità della forza di attrazione dipenda, oltre che dalla distanza del pianeta dal Sole, anche, esplicitamente, dall'orientamento del raggio vettore e dalla velocità orbitale.

2. Riservandomi di trattare a parte della nuova ipotesi ora accennata, mi limito qui, riguardo ai dubbi della prima specie, a riaffermare che in una impostazione logicamente rigorosa della ricerca della legge di gravitazione non può farsi intervenire la terza legge kepleriana. L'importante dato che viene così a mancare deve essere pertanto sostituito da nuovi, equivalenti risultati di osservazione o (meglio) da una ulteriore e ben giustificata condizione generale da introdurre. Questa seconda via fu scelta da J. Bertrand col porre un problema che comprende quello qui considerato e la nuova condizione consiste nell'esprimere che la forza – supposta centrale e dipendente dalla sola posizione del mobile – debba determinare come traiettoria una conica, *quali che siano le condizioni iniziali del moto*. La soluzione data a tale problema da G. H. Halphen, alquanto laboriosa e artificiosa, è, dal punto di vista matematico, completa, ma non risolve il problema astronomico perché fra le leggi di forza rispondenti alle condizioni dell'enunciato si trova bensì compresa quella newtoniana, ma come caso particolare di altra più generale dalla quale non può essere prescelta e presentata come soluzione unica senza aggiungere una *nuova* condizione, cioè che la forza debba dipendere dalla sola distanza del punto mobile dal centro. Tale condizione che, posta *a priori*, appare arbitraria, risulterà di fatto realizzata nella soluzione definitiva del problema, ma ciò solo *dopo* che la legge newtoniana sia stata dedotta direttamente per altra via.

Questo scopo si raggiunge senza difficoltà quando si segua un procedimento da me già attuato in passato ma sul quale è necessario ritornare con più ampio sviluppo, sia per meglio illustrare le circostanze singolari che hanno determinato il successo della ricerca, sia anche per accennare a nuovi possibili mezzi sperimentali di indagine ai quali nell'epoca delle precedenti ricerche non si poteva pensare.

3. In una Nota presentata per la pubblicazione in questi «Rendiconti» dal Levi Civita nel 1930 (2) l'autore, N. Sakellariou, trattava un problema che destò in me qualche interesse per la sua attinenza con miei studî in corso

(2) N. SAKELLARIOU, *Sur une classe de mouvements centrales*, questi «Rendiconti», vol. XII, fasc. 10.

su quello della gravitazione. Si trattava in questo nuovo problema di un moto centrale in cui le traiettorie erano coniche del piano con un fuoco comune, coincidente col centro fisso e l'intensità della forza si supponeva funzione della distanza del punto mobile dal centro e dalla velocità del punto stesso. Sebbene la forma alquanto trascurata dell'esposizione e un errore materiale di calcolo [3] in cui incorre l'autore potessero far sorgere dubbi sulla importanza di quello studio e anche sulla esattezza delle conclusioni, non poteva, d'altra parte, sfuggire alla mia attenzione una ipotesi come quella della influenza della velocità sulla gravitazione. Tale ipotesi, indipendentemente dalla possibilità o meno di trovarne una giustifica *a priori*, mi si presentava come particolarmente opportuna perché io potessi applicare, nel caso del fondamentale problema che avevo in vista, un procedimento analitico che consentisse un esame *contemporaneo* di varie ipotesi possibili: ciò nel concetto che in tali condizioni potessero apparire mutue dipendenze fra le ipotesi medesime. Fui indotto così a porre un problema [4] analogo a quello del citato autore ma generalizzato in doppio senso, cioè sia riguardo alle curve assegnate come traiettorie, le quali vengono definite da un'equazione in coordinate polari dipendente da k parametri, sia per quanto concerne la forma della funzione R rappresentante l'intensità della forza centrale (riferita alla massa unità), funzione che si suppone dipendente non solo dalla posizione del mobile ma anche dalle due derivate temporali delle coordinate, ossia – a differenza dalla ipotesi del Sakellariou – dalla velocità, in grandezza *e direzione*. (Si troverà poi più vantaggioso assumere come variabili le quattro r, θ, v, ω, indicando con ω l'angolo del raggio vettore con la tangente alla traiettoria). La R si suppone inoltre indipendente, esplicitamente, dal tempo.

In quanto ai particolari del procedimento da me seguito e che qui ricordo, va notato come questo debba necessariamente iniziarsi con l'eliminazione delle costanti predette fra l'equazione delle assegnate traiettorie e altre k le quali possono ottenersi col derivare la prima k volte rispetto al tempo; si avrà così una risultante la quale dipenderà, oltreché dalle coordinate r e θ, dalle derivate temporali di queste fino a quelle di ordine k. Se è $k = 2$ l'eliminazione di quelle del secondo ordine è immediata perché dalla espressione dell'accelerazione radiale e dall'annullarsi della componente trasversa della accelerazione nel moto piano si deducono le due relazioni

$$(1) \qquad \ddot{r} = \mathrm{R} + r\dot{\theta}^2 \quad , \quad \ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\,\dot{\theta}}{r}$$

e la risultante predetta assume allora la forma $\varphi(\mathrm{R}, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = 0$, con che la R rimane determinata in funzione delle quattro variabili dalle quali, secondo

(3) Quell'errore fu, naturalmente, rilevato dal Levi Civita, il quale però si limitò a far seguire, in una sua successiva Nota, una soluzione diversa del medesimo problema, con la quale era introdotta la necessaria rettifica.

(4) *Sulle leggi di forza centrale corrispondenti ad assegnate traiettorie e sopra un caso particolare notevole*, questi «Rendiconti», vol. XV.

l'ipotesi, dipende. Se è $k > 2$ le derivate temporali di r e θ di ordine superiore al secondo si otterranno derivando $k - 2$ volte le (I) e introducendo successivamente nei secondi membri le espressioni trovate con le operazioni precedenti. Risulteranno così tutte le derivate espresse in funzione delle sole quattro variabili predette, ma si introdurranno nel corso dei calcoli, oltre alla R, le derivate parziali di questa funzione fino a quelle dell'ordine $k - 2$ e la risultante anzidetta si trasformerà in una equazione alle derivate parziali, in generale *non lineare*, di ordine $k - 2$. Nel caso che specialmente interessa pel presente studio è $k = 3$ (numero dei parametri nell'equazione polare della conica considerata) e la corrispondente equazione alle derivate parziali è lineare e del primo ordine e si scrive immediatamente quando si noti che l'espressione completa di $d\mathrm{R}/dt$, la quale, essendo $\partial\mathrm{R}/\partial t = 0$, prende la forma

$$\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{r}}\ddot{r} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{\theta}}\ddot{\theta},$$

deve essere eguagliata, in considerazione di una relazione [5] indicata nella mia già citata Nota, a $-2\dot{r}\,\mathrm{R}/r$. Si ha così, introducendo le (I), l'equazione cercata

$$\text{(2)} \qquad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta}\dot{\theta} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{r}}(\mathrm{R} + r\dot{\theta}^2) - \frac{2\dot{r}\,\dot{\theta}}{r}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{2\dot{r}\,\mathrm{R}}{r}\,.$$

4. Ma non è la (2) la forma dell'equazione fondamentale che meglio valga a mettere in luce i vantaggi di una trattazione che contempli e prospetti *insieme* le varie ipotesi finora avanzate o accennate nell'esame del grande problema. Di tali vantaggi, i quali consistono essenzialmente nello scorgere eventuali collegamenti logici fra taluni principî e presupposti che si è condotti ad ammettere nella costruzione di nuove teorie nelle scienze della natura, si ha un esempio di singolare importanza quando si consideri la forma che assume l'equazione (2) dopo il passaggio delle variabili $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}$ alle altre r, θ, v, ω, innanzi definite. Si vede infatti da questa seconda equazione che qui si riporta [6]

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial r} + \frac{\mathrm{R}}{v}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} + \frac{2\,\mathrm{R}}{r} + \frac{\mathrm{tg}\,\omega}{r}\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{R}r + v^2}{v^2}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \omega}\right) = 0$$

come le due variabili θ e ω risultino legate, nel senso che qualora si ammetta che la funzione R sia da ritenersi indipendente dalla ω una conclusione iden-

(5) La relazione accennata è $\dfrac{d\mathrm{R}}{dt} = -\dfrac{2\dot{r}\,\mathrm{R}}{r}$ e sussiste per qualunque sistema di valori delle quattro variabili $\dot{r}, \theta, r\dot{\theta}$, essendo stata dedotta subordinatamente alla sola condizione che sia nulla la derivata temporale di $r^2\dot{\theta}$ (ossia che manchi l'accelerazione trasversa). Risulta pure dal precedente studio qui ricordato che nei movimenti sulle singole traiettorie l'intensità della forza può in ogni caso assumere l'espressione $\mathrm{R} = \dfrac{k^2}{r^2}$ intendendosi tuttavia il valore della costante k differente da una traiettoria all'altra. La determinazione delle condizioni da imporre alla R perché i valori delle singole costanti si confondano in un unico costituisce lo scopo della presente ricerca.

(6) Cfr. la mia Nota innanzi citata.

tica segua necessariamente riguardo alla θ. Questo collegamento è ben visibile nella (3) perché, qualora si ponesse in questa $\partial R/\partial\omega = 0$, ritenendo invece $\partial R/\partial\theta \gtrless 0$, la soluzione generale dell'equazione stessa conterrebbe una variabile ω *priva di significato*. E non meno chiaramente appare il detto collegamento quando si passi a scrivere l'equazione omogenea che occorre formare per giungere all'integrazione della (3). Tale equazione sussidiaria

$$\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{R}{v}\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\operatorname{tg}\omega}{r}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta} - \frac{Rr+v^2}{v^2}\frac{\partial f}{\partial\omega}\right) - \frac{2R}{r}\frac{\partial f}{\partial R} = 0 \tag{4}$$

viene a mancare, nel caso considerato, del termine comprendente $\partial f/\partial\omega$ e alla forma così ridotta corrisponde il sistema differenziale delle caratteristiche

$$dr = \frac{vdv}{R} = \frac{rd\theta}{\operatorname{tg}\omega} = -\frac{rdR}{2R} \tag{5}$$

nel quale però le tre equazioni indipendenti debbono ridursi necessariamente a due, dovendosi escludere, nello scrivere separatamente le equazioni singole, quella comprendente la terza delle espressioni (5), in quanto dipendente dalla variabile ω, che è, per l'ipotesi fatta $\partial f/\partial\omega = 0$, estranea al problema.

Questo primo risultato è già molto importante perché la *non* dipendenza della forza centrale R dall'orientamento del raggio vettore *cessa di essere una ipotesi* – ammessa come tale dai ricercatori del passato, ciò che sembrava del resto inevitabile – ma va considerata come una *realtà*, il cui definitivo riconoscimento rimane soltanto condizionato a futuri accertamenti sulla effettiva *inesistenza* di quelle perturbazioni della forza R dipendenti dalla direzione della velocità orbitale e previste con l'impostazione della equazione (3). La forma più generale che può assumere la funzione R nelle condizioni predette si determina osservando che le equazioni (5) indipendenti dalla ω ammettono le combinazioni integrabili

$$2R\,dr + r\,dR = 0 \quad , \quad vdv + r\,dR + R\,dr = 0$$

e quindi i due integrali

$$Rr^2 = c_1 \quad , \quad v^2 + 2Rr = c_2$$

e di qui segue, per la R, la condizione, necessaria e sufficiente, di verificare una relazione della forma

$$\varphi(Rr^2, v^2 + 2Rr) = 0, \tag{6}$$

con φ simbolo di funzione *arbitraria*.

Se ora si esclude ogni influenza della velocità orbitale del mobile sulla intensità della forza centrale la funzione φ dipenderà soltanto dalla variabile Rr^2 e l'equazione (6) si ridurrà, data l'arbitrarietà della detta funzione, a $Rr^2 - C = 0$, con C costante *universale*, in quanto indipendente dalle singole traiettorie e dai movimenti su queste. *Si perviene così all'espressione newtoniana della forza, senza necessità di introdurre fra i dati la terza legge* *di Keplero* (7). (Questa viene poi ritrovata con procedimento strettamente deduttivo nello sviluppo della teoria dei moti planetari e stabilita pertanto senza alcuna limitazione riguardo ai dati iniziali del moto).

5. Come si vede, in seguito al risultato così ottenuto e all'altro, non meno notevole, con cui si stabilisce la non dipendenza dell'attrazione dall'orientamento del raggio vettore, viene a determinarsi un assetto più semplice e chiaro di concetti e cognizioni che stanno a base della meccanica celeste.

I progressi così realizzati non sono soltanto di ordine logico e di semplicità: basterà, per accertarlo, notare come con gli accennati risultati si venga in possesso di argomenti decisivi per potere affermare la validità della legge newtoniana fuori del sistema solare. Riferendomi infatti a quanto già detto innanzi sulla soluzione data dall'Halphen ad un fondamentale problema posto dal Bertrand ricordo che in quello scritto è stato dimostrato come *tutte* le leggi di forza centrale alle quali corrispondano come traiettorie le coniche del piano rientrino necessariamente nell'una o nell'altra di due categorie ben definite e rappresentate con due formole comprendenti, oltre alle coordinate polari del punto mobile, alcune costanti. Si trova così che una sola (8) delle dette formole può, con opportuna scelta delle costanti comprendere l'espressione newtoniana: questa dunque sarebbe da ritenersi valida *incondizionatamente*, quindi *anche fuori del sistema solare* (sistemi stellari binarî o multipli) se l'ipotesi che permette di giungere alla espressione cercata con l'eliminazione della coordinata angolare non dovesse considerarsi, in mancanza di concreti tentativi di giustifica, arbitraria. Tale arbitrio cessa di esistere e la dipendenza della forza dalla sola distanza è ora da ritenersi un fatto bene stabilito con la presente ricerca: ciò in base ad una sola premessa molto naturale (*inesistenza* di un supposto influsso della velocità del mobile sulla intensità della forza di attrazione), premessa che appare, anche per importanti rilievi particolari, incontestabile. Cade infatti con l'accennata ipotesi anche l'altra sulla dipendenza della forza dalla direzione del raggio vettore, ciò pel collegamento fra le due che è già apparso con la impostazione del problema. Degli accennati rilievi e della possibilità attuale di procedere ad un concreto accertamento sulla validità dei presupposti ammessi attraverso un controllo sperimentale mi propongo di trattare in una successiva Nota.

(7) Al medesimo risultato si giunge in maniera non meno semplice quando si osservi che l'equazione (3), quando si introducano le condizioni (collegate come si è visto) $\partial R/\partial\omega = 0$, $\partial R/\partial\theta = 0$ e anche l'ultima $\partial R/\partial v = 0$ si riduce ad una equazione differenziale ordinaria che lega la funzione R alla sola variabile indipendente r, cioè a $\frac{dR}{dr} = -\frac{2R}{r}$, la quale integrata dà appunto $Rr^2 = C$.

(8) Un'altra categoria, indicata pure dall'Halphen, comprende altre leggi di forza, fra le quali quella indipendente dalla direzione del raggio vettore determina come traiettorie delle coniche il cui centro di figura coincide col centro attraente: caso che le osservazioni sui sistemi binari permettono di escludere ai fini della ricerca della legge di natura.