Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Cataldo Agostinelli

Su una spiegazione magnetoidrodinamica dell'esistenza del campo magnetico terrestre e di quello generale delle stelle. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.6, p. 801–807.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_6_801_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Magnetoidrodinamica. — *Su una spiegazione magnetoidrodinamica dell'esistenza del campo magnetico terrestre e di quello generale delle stelle.* Nota II [(*)] del Corrisp. CATALDO AGOSTINELLI.

4. Continuando la trattazione iniziata nella Nota I, se analogamente consideriamo l'equazione

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}(t),$$

si ha la soluzione particolare

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O}), \quad \text{con } \operatorname{div} \boldsymbol{v}_1 = 0. \tag{22}$$

Ponendo quindi

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O}) + \operatorname{grad} f \tag{23}$$

e prendendo la divergenza di ambo i membri si ha

$$\Delta_2 f = 0, \tag{24}$$

cioè anche la funzione f sarà una funzione armonica.

Supponiamo che il recipiente ellissoidale in cui si muove la massa fluida sia dotato di un moto traslatorio rigido con velocità $\boldsymbol{v}_0$. Imponendo che sulla superficie Σ sia nulla la componente normale della velocità relativa $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0$, dalla (23) si deduce che in superficie deve essere verificata la condizione

$$\frac{df}{dn} = \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{n} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \times \boldsymbol{n}, \quad \text{sopra } \Sigma,$$

cioè, dette v_{01}, v_{02}, v_{03} le componenti di $\boldsymbol{v}_0$ ed ω_1, ω_2, ω_3 quelle del vortice $\boldsymbol{\omega}$, secondo gli assi dell'ellissoide, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{x}{a^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{y}{b^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{z}{c^2} &= v_{01}\frac{x}{a^2} + v_{02}\frac{y}{b^2} + v_{03}\frac{z}{c^2} - \\ &- \frac{1}{2}\left[(\omega_2 z - \omega_3 y)\frac{x}{a^2} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\frac{y}{b^2} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\frac{z}{c^2}\right], \quad \text{sopra } \Sigma. \end{aligned} \tag{25}$$

Con calcolo analogo a quello con cui si è determinata la funzione F, si trova

$$f = v_{01}x + v_{02}y + v_{03}z - \frac{1}{2}\left(\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}\omega_1 \cdot yz + \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2}\omega_2 \cdot zx + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\omega_3 \cdot xy\right). \tag{26}$$

(*) Presentata nell'adunanza del 12 maggio 1962.

In virtù della (23) le componenti cartesiane v_1, v_2, v_3, della velocità di una particella fluida risultano quindi

$$(27) \qquad \begin{cases} v_1 = v_{01} + a^2\left(\dfrac{\omega_2}{c^2+a^2} z - \dfrac{\omega_3}{a^2+b^2} y\right) \\ v_2 = v_{02} + b^2\left(\dfrac{\omega_3}{a^2+b^2} x - \dfrac{\omega_1}{b^2+c^2} z\right) \\ v_3 = v_{03} + c^2\left(\dfrac{\omega_1}{b^2+c^2} y - \dfrac{\omega_2}{c^2+a^2} x\right). \end{cases}$$

5. Osserviamo ora che prendendo il rotore di ambo i membri della terza delle (I), ed eliminando il rot $\mathbf{E}$ per mezzo della seconda, poiché il vettore $\mathbf{I}$ è indipendente dal punto, si ha

$$(28) \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\mathbf{B} \wedge \boldsymbol{v}) = 0.$$

Così pure, prendendo il rotore di ambo i membri dell'equazione del moto e ponendo rot $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega}$, si ha

$$(29) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \operatorname{rot}(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v}) = \frac{1}{\delta} \operatorname{rot}(\mathbf{I} \wedge \mathbf{B}).$$

Dunque i vettori densità di corrente $\mathbf{I}$ e vortice $\boldsymbol{\omega}$, che abbiamo supposti assegnati a priori, devono essere tali che siano verificate le condizioni (28) e (29), le quali, essendo div $\mathbf{B} = 0$ e div $\boldsymbol{v} = 0$, danno luogo alle seguenti equazioni scalari

$$(30) \qquad \frac{\partial B_h}{\partial t} + v_1 \frac{\partial B_h}{\partial x} + v_2 \frac{\partial B_h}{\partial y} + v_3 \frac{\partial B_h}{\partial z} - \left(B_1 \frac{\partial v_h}{\partial x} + B_2 \frac{\partial v_h}{\partial y} + B_3 \frac{\partial v_h}{\partial z}\right) = 0$$

$$(31) \qquad \frac{d\omega_h}{dt} - \left(\omega_1 \frac{\partial v_h}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial v_h}{\partial y} + \omega_3 \frac{\partial v_h}{\partial z}\right) + \frac{1}{\delta}\left(I_1 \frac{\partial B_h}{\partial x} + I_2 \frac{\partial B_h}{\partial y} + I_3 \frac{\partial B_h}{\partial z}\right) = 0,$$

$$(h = 1, 2, 3).$$

Sostituendo nelle (30) in luogo delle B_h e v_h i valori espressi dalle (21) e (27), si ottengono delle equazioni lineari in x, y, z. Poiché esse devono essere verificate identicamente, uguagliando a zero i coefficienti, si hanno le seguenti equazioni

$$(32) \qquad \begin{cases} I'_1 = \alpha_1^2 (\omega_2 I_3 - \omega_3 I_2) \\ I'_2 = \alpha_2^2 (\omega_3 I_1 - \omega_1 I_3) \\ I'_3 = \alpha_3^2 (\omega_1 I_2 - \omega_2 I_1), \end{cases}$$

nelle quali gli apici indicano derivazione rispetto al tempo, e dove per semplicità si è posto.

$$\alpha_1^2 = \frac{a^2(b^2+c^2)}{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}, \quad \alpha_2^2 = \frac{b^2(c^2+a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}, \quad \alpha_3^2 = \frac{c^2(a^2+b^2)}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}.$$

Ponendo inoltre

$$\mathfrak{K}_1 = K_1 \Gamma_1 \quad , \quad \mathfrak{K}_2 = K_2 \Gamma_2 \quad , \quad \mathfrak{K}_3 = K_3 \Gamma_3 ,$$

che sono quantità proporzionali alle componenti del momento del dipolo, si hanno le ulteriori equazioni

$$(33) \quad \begin{cases} \mathfrak{K}'_1 + \dfrac{v_{o3}}{c^2+a^2} I_2 - \dfrac{v_{o2}}{a^2+b^2} I_3 + \dfrac{b^2}{a^2+b^2} \mathfrak{K}_2 \omega_3 - \dfrac{c^2}{c^2+a^2} \mathfrak{K}_3 \omega_2 = 0 \\ \mathfrak{K}'_2 + \dfrac{v_{o1}}{a^2+b^2} I_3 - \dfrac{v_{o3}}{b^2+c^2} I_1 + \dfrac{c^2}{b^2+c^2} \mathfrak{K}_3 \omega_1 - \dfrac{a^2}{a^2+b^2} \mathfrak{K}_1 \omega_3 = 0 \\ \mathfrak{K}'_3 + \dfrac{v_{o2}}{b^2+c^2} I_1 - \dfrac{v_{o1}}{c^2+a^2} I_2 + \dfrac{a^2}{c^2+a^2} \mathfrak{K}_1 \omega_2 - \dfrac{b^2}{b^2+c^2} \mathfrak{K}_2 \omega_1 = 0 . \end{cases}$$

Analogamente dalle (31) si deducono le seguenti equazioni

$$(34) \quad \begin{cases} \omega'_1 + \alpha_1^2 \dfrac{c^2-b^2}{c^2+b^2} \left(\omega_2 \omega_3 - \dfrac{1}{\delta} I_2 I_3 \right) = 0 \\ \omega'_2 + \alpha_2^2 \dfrac{a^2-c^2}{a^2+c^2} \left(\omega_3 \omega_1 - \dfrac{1}{\delta} I_3 I_1 \right) = 0 \\ \omega'_3 + \alpha_3^2 \dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2} \left(\omega_1 \omega_2 - \dfrac{1}{\delta} I_1 I_2 \right) = 0 . \end{cases}$$

Il sistema di equazioni (32) e (34), che definisce le componenti I_1, I_2, I_3 del vettore corrente di conduzione $\mathbf{I}$ e le componenti ω_1, ω_2, ω_3 del vortice $\boldsymbol{\omega}$ in funzione del tempo, ammette i seguenti quattro integrali primi quadratici fra loro indipendenti (cfr. i lavori citati in [1]):

$$(35) \qquad \frac{I_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{I_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{I_3^2}{\alpha_3^2} = \text{cost.}$$

$$(36) \qquad \frac{b^2+c^2}{\alpha_1^2}\omega_1^2 + \frac{c^2+a^2}{\alpha_2^2}\omega_2^2 + \frac{a^2+b^2}{\alpha_3^2}\omega_3^2 - \frac{1}{\delta}\left(\frac{a^2}{\alpha_1^2} I_1^2 + \frac{b^2}{\alpha_2^2} I_2^2 + \frac{c^2}{\alpha_3^2} I_3^2 \right) = \text{cost.}$$

$$(37) \qquad \frac{b^2+c^2}{\alpha_1^2} I_1 \omega_1 + \frac{c^2+a^2}{\alpha_2^2} I_2 \omega_2 + \frac{a^2+b^2}{\alpha_3^2} I_3 \omega_3 = \text{cost.}$$

$$(38) \qquad \frac{(b^2+c^2)^2}{\alpha_1^2}\omega_1^2 + \frac{(c^2+a^2)^2}{\alpha_2^2}\omega_2^2 + \frac{(a^2+b^2)^2}{\alpha_3^2}\omega_3^2 - \frac{1}{\delta}\left(\frac{a^4}{\alpha_1^2} I_1^2 + \frac{b^4}{\alpha_2^2} I_2^2 + \frac{c^4}{\alpha_3^2} I_3^2 \right) = \text{cost.}$$

Si riconosce facilmente come questi integrali sono sufficienti per ridurre l'integrazione del sistema di equazioni (32) e (34), alle quadrature. Invero, ponendo

$$(39) \quad \begin{cases} A = b^2 + c^2 \quad , \quad B = c^2 + a^2 \quad , \quad C = a^2 + b^2 , \\ \omega_1 = -\alpha_1 p \quad , \quad \omega_2 = -\alpha_2 q \quad , \quad \omega_3 = -\alpha_3 r , \\ I_1 = I_0 \alpha_1 \gamma_1 \quad , \quad I_2 = I_0 \alpha_2 \gamma_2 \quad , \quad I_3 = I_0 \alpha_3 \gamma_3 ; \qquad \tau = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 t , \end{cases}$$

dove I_0^2 è la costante del secondo membro dell'integrale (35), le equazioni (32) e (34) diventano

$$
(32') \quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\gamma_1}{d\tau} &= \gamma_2 r - \gamma_3 q, \\ \frac{d\gamma_2}{d\tau} &= \gamma_3 p - \gamma_1 r, \\ \frac{d\gamma_3}{d\tau} &= \gamma_1 q - \gamma_2 p, \end{aligned}\right. \qquad (34') \quad \left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{d\tau} + (C - B)\left(qr - \frac{I_0^2}{\delta}\gamma_2\gamma_3\right) &= 0 \\ B\frac{dq}{d\tau} + (A - C)\left(rp - \frac{I_0^2}{\delta}\gamma_3\gamma_1\right) &= 0 \\ C\frac{dr}{d\tau} + (B - A)\left(pq - \frac{I_0^2}{\delta}\gamma_1\gamma_2\right) &= 0, \end{aligned}\right.
$$

che sono le equazioni di Poisson–Eulero relative al moto di un corpo rigido intorno a un punto fisso O, le cui molecole sono attratte da un piano fisso proporzionalmente alla distanza da questo piano (problema di De Brun) (3). In esse $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sono i coseni direttori della normale condotta dal punto fisso al piano attirante, mentre p, q, r sono le componenti della velocità angolare di rotazione secondo gli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso ed A, B, C rappresentano i momenti principali d'inerzia relativi allo stesso punto.

Il problema di moto magnetoidrodinamico considerato è dunque equivalente al problema di De Brun. Ma questo problema si risolve come si sa mediante quadrature, perciò altrettanto avviene del problema magnetoidrodinamico qui considerato.

In virtù delle posizioni (39) i quattro integrali precedenti diventano

$$
(35') \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1
$$

$$
(36') \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \frac{I_0^2}{\delta}(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) = h\ (\text{cost.})
$$

$$
(37') \qquad Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = K_0\ (\text{cost.})
$$

$$
(38') \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 - \frac{I_0^2}{\delta}(BC\gamma_1 + CA\gamma_2 + AB\gamma_3) = l\ (\text{cost.})
$$

il primo dei quali è l'integrale dei coseni direttori, il secondo l'integrale dell'energia, il terzo l'integrale del momento della quantità di moto. L'esistenza del quarto integrale consente di integrare il sistema (32'), (34') mediante quadrature, e quindi anche il sistema (32), (34).

Determinate così in funzione del tempo le componenti dei vettori **I** ed $\boldsymbol{\omega}$, rimangono da considerare le equazioni (33), in cui sono da ritenere assegnate in funzione del tempo le componenti v_{01}, v_{02}, v_{03} della velocità di traslazione dell'ellissoide. Esse allora costituiscono un sistema di tre equazioni differenziali ordinarie lineari del primo ordine, non omogenee, che definiscono le tre componenti del momento del dipolo in funzione del tempo e per mezzo di elementi noti.

Risulta così dimostrata l'esistenza nell'interno dell'ellissoide di un moto magnetoidrodinamico vorticoso che dà luogo ad un campo magnetico la cui componente normale in superficie assume gli stessi valori di quella che determinerebbe un dipolo magnetico posto nel centro.

(3) Cfr. P. APPELL, loco citato, T. II, Chap. XXV, n. 499.

È opportuno osservare come le equazioni (33) ammettono un integrale primo che si ottiene facilmente moltiplicandole rispettivamente per

$$(a^2+b^2)(c^2+a^2)\,I_1 \quad , \quad (b^2+c^2)(a^2+b^2)\,I_2 \quad , \quad (c^2+a^2)(b^2+c^2)\,I_3 ,$$

sommandole quindi membro a membro e tenendo conto delle (32). Si deduce così

$$(a^2+b^2)(c^2+a^2)\,\mathfrak{K}_1 I_1 + (b^2+c^2)(a^2+b^2)\,\mathfrak{K}_2 I_2 + (c^2+a^2)(b^2+c^2)\,\mathfrak{K}_3 I_3 = \text{cost.} \tag{40}$$

che è l'integrale richiesto.

6. Nel caso in cui l'ellissoide si riduce ad una sfera, e quindi $a = b = c$, le equazioni (34) mostrano subito che *le componenti* ω_1, ω_2, ω_3 *del vortice sono anche costanti rispetto al tempo e il moto interno della massa fluida si riduce ad una rotazione rigida uniforme* con velocità angolare $\frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2}$.

In questo caso le equazioni (32) diventano più semplicemente

$$\left\{\begin{aligned} I_1' &= \frac{1}{2}(\omega_2 I_3 - \omega_3 I_2) \\ I_2' &= \frac{1}{2}(\omega_3 I_1 - \omega_1 I_3) \\ I_3' &= \frac{1}{2}(\omega_1 I_2 - \omega_2 I_1), \end{aligned}\right. \tag{41}$$

delle quali sussistono gli integrali

$$I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = I_0^2 \tag{42}$$

$$\omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 + \omega_3 I_3 = J_0\,\omega \tag{43}$$

i quali esprimono che il vettore densità di corrente **I** ha modulo costante I_0 e forma un angolo costante con la direzione del vortice, essendo J_0 la proiezione di **I** nella direzione del vortice.

Derivando ambo i membri della prima delle (41) rispetto al tempo ed eliminando I_2', I_3', servendosi delle altre due, si ottiene facilmente per l'incognita I_1 l'equazione

$$I_1'' + \frac{1}{4}\omega^2 I_1 = \frac{1}{4}\omega_1\,\omega J_0 ,$$

e analogamente per I_2 e I_3. Si deducono allora facilmente per I_1, I_2, I_3, i seguenti valori:

$$\left\{\begin{aligned} I_1 &= \frac{\omega_1}{\omega} J_0 + C_1 \cos\frac{1}{2}\omega t + C_2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega t \\ I_2 &= \frac{\omega_2}{\omega} J_0 - \frac{1}{\omega_2^2+\omega_3^2}\cdot \\ &\quad \cdot\left[(\omega_1\omega_2 C_1 + \omega_3\omega C_2)\cos\frac{1}{2}\omega t - (\omega\omega_3 C_1 - \omega_1\omega_2 C_2)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega t\right] \\ I_3 &= \frac{\omega_3}{\omega} J_0 - \frac{1}{\omega_2^2+\omega_3^2}\cdot \\ &\quad \cdot\left[(\omega_1\omega_3 C_1 - \omega\omega_2 C_2)\cos\frac{1}{2}\omega t + (\omega\omega_2 C_1 + \omega_1\omega_3 C_2)\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega t\right], \end{aligned}\right. \tag{44}$$

dove C_1, C_2 sono costanti arbitrarie. Le componenti della corrente di conduzione sono dunque funzioni periodiche del tempo di periodo $T = 4\pi/\omega$, uguale a quello di rotazione della massa fluida.

Le equazioni (33) diventano ora

$$(45)\qquad \begin{cases} \mathfrak{K}'_1 + \dfrac{1}{2}(\omega_3 \mathfrak{K}_2 - \omega_2 \mathfrak{K}_3) = \dfrac{1}{2a^2}(v_{o2} I_3 - v_{o3} I_2) \\ \mathfrak{K}'_2 + \dfrac{1}{2}(\omega_1 \mathfrak{K}_3 - \omega_3 \mathfrak{K}_1) = \dfrac{1}{2a^2}(v_{o3} I_1 - v_{o1} I_3) \\ \mathfrak{K}'_3 + \dfrac{1}{2}(\omega_2 \mathfrak{K}_1 - \omega_1 \mathfrak{K}_2) = \dfrac{1}{2a^2}(v_{o1} I_2 - v_{o2} I_1), \end{cases}$$

i cui secondi membri sono noti, mentre i primi membri, uguagliati a zero, si identificano con le equazioni (41).

Si riconosce facilmente, avendo riguardo alle (41), che le equazioni (45) ammettono gli integrali primi

$$(46)\qquad I_1 \mathfrak{K}_1 + I_2 \mathfrak{K}_2 + I_3 \mathfrak{K}_3 = \text{cost.}$$

$$(47)\qquad \omega_1 \mathfrak{K}_1 + \omega_2 \mathfrak{K}_2 + \omega_3 \mathfrak{K}_3 + \frac{1}{a^2}(v_{o1} I_1 + v_{o2} I_2 + v_{o3} I_3) - \\ - \frac{1}{a^2}\int (v'_{o1} I_1 + v'_{o2} I_2 + v'_{o3} I_3)\, dt = \omega K_o\,(\text{cost.})$$

il primo dei quali non è altro che l'integrale (40) per $a = b = c$.

Per integrare nel modo più semplice il sistema (45), osserviamo che indicando con $\mathbf{K}$ il vettore di componenti $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ esso equivale all'equazione vettoriale

$$(48)\qquad \frac{d\mathbf{K}}{dt} + \frac{1}{2}\mathbf{K} \wedge \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2a^2}\boldsymbol{v}_o \wedge \mathbf{I},$$

da cui, derivando ambo i membri rispetto al tempo, ricordando che $\boldsymbol{\omega}$ è vettore costante, tenendo conto dell'integrale (47) che si può scrivere

$$\mathbf{K} \times \omega + \frac{1}{a^2}\boldsymbol{v}_o \times \mathbf{I} - \frac{1}{a^2}\int \boldsymbol{v}'_o \times \mathbf{I} \cdot dt = \omega K_o,$$

e osservando che per le (41) è $\dfrac{d\mathbf{I}}{dt} = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{I}$, si deduce l'equazione

$$(49)\qquad \frac{d^2\mathbf{K}}{dt^2} + \frac{1}{4}\boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{K} = \boldsymbol{\Phi}(t),$$

dove con $\boldsymbol{\Phi}(t)$ si è indicato il vettore definito dalla relazione

$$(50)\qquad \boldsymbol{\Phi}(t) = \frac{1}{4}\omega K_o \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{4a^2} J_o \omega \boldsymbol{v}_o - \frac{1}{2a^2}\boldsymbol{v}_o \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{I} + \\ + \frac{1}{2a^2}\boldsymbol{v}'_o \wedge \mathbf{I} + \frac{1}{4a^2}\int \boldsymbol{v}'_o \times \mathbf{I} \cdot dt \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Prescindendo allora dall'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (49), le cui componenti sono della forma (44), si ha infine

$$\mathbf{K}(t) = -\frac{2}{\omega}\cos\frac{1}{2}\omega t\cdot\int \boldsymbol{\Phi}(t)\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega t\cdot dt + \tag{51}$$

$$+\frac{2}{\omega}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega t\cdot\int \boldsymbol{\Phi}(t)\cos\frac{1}{2}\omega t\cdot dt\,,$$

che fornisce in funzione del tempo il vettore **K** che è proporzionale al momento magnetico del dipolo.

Se la velocità di traslazione $\boldsymbol{v}_0$ è una funzione periodica del tempo (come nel caso di una rotazione uniforme del centro della sfera fluida), di periodo diverso di quello di rotazione della massa fluida, si riconosce facilmente che il momento magnetico del dipolo risulta una funzione oscillante del tempo, in generale non periodica, che si mantiene di grandezza finita nel tempo.

Un caso particolare notevole si ha quando la traslazione è uniforme e quindi la velocità $\boldsymbol{v}_0$ è costante. In questo caso si ha dalla (50)

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \frac{1}{4}\omega K_0\,\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{4a^2}J_0\,\omega\boldsymbol{v}_0 - \frac{1}{2a^2}\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{I}\,,$$

e se $\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{\omega}\neq 0$, se cioè la traslazione e la rotazione non sono ortogonali, il secondo membro è periodico di pulsazione ω e pertanto la (51) dà luogo ad integrali oscillanti di ampiezza crescente indefinitamente col tempo. Si ha cioè un fenomeno di risonanza in cui le oscillazioni del momento magnetico del dipolo vanno esaltandosi col tempo. Una traslazione molto prossima al moto uniforme darà allora luogo ad un momento magnetico del dipolo quasi periodico rispetto al tempo, e di ampiezza molto grande. Questo risultato può spiegare, come risulta dalle osservazioni, l'esistenza di stelle con campi magnetici variabili col tempo di forte intensità.

Se più in particolare la traslazione $\boldsymbol{v}_0$ è nulla, si ha $\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{4}\omega K_0\,\boldsymbol{\omega}$ (vettore costante parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$), e la (49) porge in questo caso

$$\mathbf{K} = K_0\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} + \mathbf{A}_0\cos\frac{1}{2}\omega t + \mathbf{B}_0\operatorname{sen}\frac{1}{2}\omega t$$

con $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$ vettori costanti. A conclusioni analoghe si perviene se la traslazione è uniforme ed è ortogonale alla rotazione $\boldsymbol{\omega}$.