ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIORGIO FERRARESE

Sul campo gravitazionale einsteiniano generato da una massa sferica rotante

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 32 (1962), n.5, p.
658–665.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_5_658_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Meccanica. — *Sul campo gravitazionale einsteiniano generato da una massa sferica rotante*^(*). Nota di GIORGIO FERRARESE, presentata^(**) dal Socio A. SIGNORINI.

In un recente Lavoro apparso in questi « Rendiconti » (cfr. [9]) è stata data una soluzione rigorosa del problema, già considerato in prima approssimazione da H. Thirring (cfr. [11], [12]) riguardante la determinazione, nell'ambito della teoria einsteiniana, del campo gravitazionale all'interno di un guscio materiale sferico uniformemente rotante. Il risultato è una ulteriore conferma della coerenza e dell'effettivo contenuto fisico di definizioni già da tempo introdotte in relatività generale (cfr. [1], [2], [3], [4], [5], [6]) per le grandezze fisiche fondamentali, in particolare per il campo gravitazionale.

Un problema in certo modo analogo, anch'esso considerato da H. Thirring e J. Lense fin dal 1918 (cfr. [13]) è quello della determinazione del campo gravitazionale all'esterno di una massa sferica uniformemente rotante. Il risultato ottenuto dai due Autori, benché approssimato, è concettualmente assai notevole poiché mette in evidenza, accanto a un'attrazione centrale di tipo newtoniano, forze qualitativamente simili a quelle, centrifuga e di Coriolis, classicamente presenti in un riferimento rotante; mostrando con ciò che, alla determinazione del campo contribuisce non soltanto la presenza e la costituzione della materia ma anche il suo movimento.

In questa Nota ci proponiamo di trattare il problema in modo del tutto rigoroso, nell'impostazione corretta che ad esso compete in relatività generale. Il risultato ottenuto conferma naturalmente quello approssimato di Thirring-Lense, riducendosi ad esso nell'approssimazione lineare.

I. DEFINIZIONE DI RIFERIMENTO RIGIDO ROTANTE RISPETTO ALLA MASSA CENTRALE. — Il campo gravitazionale esterno generato da una massa sferica M in quiete è notoriamente determinato dal ds^2 di Schwarzschild di cui è perfettamente conosciuta l'espressione esplicita, che tra poco richiameremo, nel riferimento di staticità S . Naturalmente tale ds^2 potrà essere espresso anche in altri riferimenti, non appena sia definito il loro movimento rispetto al riferimento di staticità. Se noi saremo in grado di determinare un riferimento S_0 che risulti *rigido* (nel senso assoluto della relatività generale) e rispetto al quale la massa centrale appaia rotare con velocità angolare costante ω ; rispetto a un tale riferimento saranno soddisfatte le ipotesi del problema e l'espressione, in esso assunta dai potenziali gravitazionali di Schwarzschild,

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca N° 36 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1961-62.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1962.

ci consentirà di determinare, in modo rigoroso, il campo gravitazionale nelle condizioni fisiche richieste.

Cominciamo quindi col richiamare l'espressione del ds^2 esterno di Schwarzschild (cfr. [10]) nel riferimento di staticità e più particolarmente in coordinate « polari » r, θ, Φ (1):

$$(1) \quad ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2) - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2,$$

essendo

$$(2) \quad \alpha = \frac{2kM}{c^2} \equiv \frac{\chi Mc^2}{4\pi}$$

(k , costante di gravitazione newtoniana; χ , costante di gravitazione einsteiniana; c , velocità della luce nel vuoto). In luogo di coordinate polari introduciamo ora coordinate cilindriche R, Φ, Z , anch'esse adattate al riferimento di staticità S , mediante le posizioni

$$R = r \sin \theta, \quad Z = r \cos \theta.$$

Si avrà allora, invertendo, $r = \sqrt{R^2 + Z^2}$, $\theta = \text{arctg} \frac{R}{Z}$ e quindi

$$dr = \frac{R dR + Z dZ}{r}, \quad d\theta = \frac{Z dR - R dZ}{r^2},$$

ciò che riduce il ds^2 (1) alla forma

$$(1)' \quad ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left\{ dR^2 + dZ^2 - \frac{\alpha}{r^3} (Z dR - R dZ)^2 \right\} + \\ + R^2 d\Phi^2 - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2.$$

Ciò fatto, consideriamo il riferimento fluido $S_{\omega, \tau} \equiv (\rho, \varphi, z; t)$ definito dalla trasformazione

$$(3) \quad R = \rho, \quad \Phi = \omega\tau + \varphi, \quad Z = z$$

essendo $\omega \equiv \omega(\rho)$ e $\tau \equiv \tau(t)$ due funzioni, degli argomenti ρ e t rispettivamente, a priori completamente arbitrarie. Le (3) si possono ben interpretare come le equazioni di moto, rispetto ad S , di un sistema fluido le cui particelle si muovono di moto « circolare » attorno all'« asse » z , con velocità angolare dipendente dalla « distanza » ρ dall'asse di rotazione. Esse definiscono pertanto, sotto convenienti limitazioni per $\omega(\rho)$ e $\tau(t)$ [cfr. (4)], un riferimento fisico rispetto al quale le « particelle » costituenti S appaiono muoversi di moto circolare attorno a z .

(1) Non sarà inutile sottolineare il carattere puramente convenzionale delle locuzioni tra virgolette.

Per ciascuna particella di $S_{\omega, \tau}$ il quadrato della velocità relativa standard rispetto ad S (cfr. [1], p. 330) è rappresentato da ($x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \Phi$)

$$v^2 = \gamma_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dT} \frac{dx^\beta}{dT} \equiv r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\Phi}{dT} \right)^2 = \frac{\rho^2 \omega^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2$$

($\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \gamma_\alpha \gamma_\beta$, tensore metrico spaziale) onde la limitazione $v^2 < c^2$, necessaria per il carattere di riferimento fisico di $S_{\omega, \tau}$, si traduce nell'altra

$$(4) \quad 1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2 \rho^2}{c^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 > 0.$$

Si noti che la (4) ha come necessaria conseguenza la disuguaglianza $1 - \frac{\alpha}{r} > 0$ che nella (1) è sottintesa.

Nel nuovo riferimento $S_{\omega, \tau}$, il ds^2 di Schwarzschild assume la forma esplicita

$$(1)'' \quad ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}} \left\{ d\rho^2 + dz^2 - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \frac{(z d\rho - \rho dz)^2}{\rho^2 + z^2} \right\} + \\ + \rho^2 (\omega' \tau d\rho + d\varphi + \omega \tau' dt)^2 - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \right) dt^2.$$

Si vede bene di qui che se $\omega(\rho)$ si riduce ad una costante e $\tau(t)$ ad una funzione lineare, sparisce nei singoli coefficienti ogni dipendenza da t , quindi il riferimento $S_{\omega, \tau}$ diviene un riferimento rigido. Ma è facile accertare che, per la rigidità di $S_{\omega, \tau}$ non solo basta ma anche occorre che sia insieme $\omega = \text{cost.}$, $\tau' = \text{cost.}$

Per riconoscerlo cominciamo con l'osservare che, posto $x^1 = \rho$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$, $x^4 = ct$, le componenti covarianti, $\gamma_i = g_{i4} / \sqrt{-g_{44}}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) del versore γ tangente alle linee $x^4 = \text{var.}$ valgono

$$(5) \quad \gamma_1 = \frac{\rho^2 \omega \omega' \tau \tau'}{c \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \left(\frac{\omega}{c} \rho \tau' \right)^2}}, \quad \gamma_2 = \frac{\rho^2 \omega \tau'}{c \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \left(\frac{\omega}{c} \rho \tau' \right)^2}}, \\ \gamma_3 = 0, \quad \gamma_4 = - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \left(\frac{\omega}{c} \rho \tau' \right)^2},$$

ove, per semplicità di scrittura, si è posto

$$(6) \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}.$$

D'altra parte, se il riferimento $S_{\omega, \tau}$ è rigido ($\bar{K}_{\alpha\beta} = \gamma^4 \partial_4 \gamma_{\alpha\beta} = 0$) è neces-

sariamente $\gamma_{22} \equiv g_{22} + (\gamma_2)^2 = \frac{\rho^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)}{1 - \frac{\alpha}{r} - \left(\frac{\omega}{c} \rho \tau' \right)^2}$ indipendente da t e quindi

$\tau' = \text{cost.}$ L'ipotesi di rigidità ha pertanto, come prima conseguenza, la linearità di τ onde nella (3) si può supporre, senza alcuna restrizione essen-

ziale, $\tau \equiv t$. Insieme a γ_{22} deve essere poi indipendente dal tempo anche

$$\gamma_{12} \equiv g_{12} + \gamma_1 \gamma_2 = \frac{\rho^2 \omega' t \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2}, \text{ cioè che implica } \omega' = 0.$$

Si può pertanto concludere che il riferimento $S_{\omega, \tau}$, per $\omega = \text{cost.}$ e $\tau = t$, rappresenta la naturale e corretta definizione di riferimento rotante rispetto al riferimento originario S . In un tale riferimento, che nel seguito designeremo semplicemente con S_{ω} , la massa sferica M appare veramente rotare con velocità angolare costante ω .

2. POTENZIALI GRAVITAZIONALI E TENSORE METRICO SPAZIALE NEL RIFERIMENTO S_{ω} . - Supposto ormai $\omega = \text{cost.}$, $\tau = t$ il ds^2 (1)'', ferma restando la posizione (6), si riduce alla seguente forma più semplice:

$$(7) \quad ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left\{ d\rho^2 + dz^2 - \frac{\alpha}{r^3} (z d\rho - \rho dz)^2 \right\} + \\ + \rho^2 d\varphi^2 + 2 \omega \rho^2 d\varphi dt - c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2 \right) dt^2.$$

Le componenti covarianti del tensore metrico dello spazio-tempo V_4 sono allora date dalla matrice

$$(8) \quad g_{ij} \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(1 - \frac{\alpha z^2}{r^3} \right) & 0 & \frac{\alpha \rho z}{r^3 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)} & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 & \frac{\omega \rho^2}{c} \\ \frac{\alpha \rho z}{r^3 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)} & 0 & \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(1 - \frac{\alpha \rho^2}{r^3} \right) & 0 \\ 0 & \frac{\omega \rho^2}{c} & 0 & - \left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2 \right) \end{vmatrix}$$

e le componenti di γ si riducono a [cfr. (5)]

$$(9) \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\omega \rho^2}{c \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2}}, \quad \gamma_3 = 0, \quad \gamma_4 = - \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2}.$$

Insieme si ha, per il tensore metrico spaziale, la tabella

$$(10) \quad \gamma_{\alpha\beta} \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(1 - \frac{\alpha z^2}{r^3} \right) & 0 & \frac{\alpha \rho z}{r^3 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)} \\ 0 & \frac{\rho^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2} & 0 \\ \frac{\alpha \rho z}{r^3 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)} & 0 & \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(1 - \frac{\alpha \rho^2}{r^3} \right) \end{vmatrix},$$

ciò che dà

$$(10 a) \quad \gamma \equiv \det (\gamma_{\alpha\beta}) = \frac{\rho^2}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2},$$

mentre la limitazione (4) si scrive

$$(11) \quad 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2 > 0.$$

La forma quadratica ternaria $\gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ che dà il quadrato della distanza spaziale nel riferimento considerato S_ω si riduce quindi a

$$(12) \quad d\sigma^2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(1 - \frac{\alpha z^2}{r^3} \right) d\rho^2 + \frac{\rho^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2} d\varphi^2 + \\ + \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(1 - \frac{\alpha \rho^2}{r^3} \right) dz^2 + 2 \frac{\alpha \rho z}{r^3 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)} d\rho dz :$$

come è naturale essa risulta *definita positiva*. Infatti la (12) non differisce da

$$d\sigma^2 = d\rho^2 + dz^2 + \frac{\rho^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2} d\varphi^2 + \alpha \frac{(\rho d\rho + z dz)^2}{r^3 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)}$$

onde l'asserto è immediata conseguenza della limitazione (11).

L'intervallo di tempo standard in S_ω è dato infine dalla forma lineare

$$dT = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2} dt - \frac{\omega}{c^2} \frac{\rho^2 d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2}}.$$

3. CARATTERI INTRINSECI DEL RIFERIMENTO S_ω E CAMPO GRAVITAZIONALE. - Quanto ai caratteri intrinseci del riferimento (cfr. [4]) si ha:

$$\text{Tensor vortice spaziale, } \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} = \gamma_4 \left[\tilde{\partial}_\alpha \left(\frac{\gamma_\beta}{\gamma_4} \right) - \tilde{\partial}_\beta \left(\frac{\gamma_\alpha}{\gamma_4} \right) \right]:$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\Omega}_{12} = -\frac{\omega}{c} \gamma_4 \partial_\varphi \left(\frac{\rho^2}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2} \right) = 2 \frac{\omega}{c} \sqrt{\gamma} \frac{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha \rho^2}{2r^3}}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2} \\ \tilde{\Omega}_{23} = \frac{\omega}{c} \gamma_4 \partial_z \left(\frac{\rho^2}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2} \right) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\gamma} \frac{\alpha \rho z}{r^3 \left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2 \right)} \\ \tilde{\Omega}_{31} = 0. \end{array} \right.$$

Vettore velocità angolare, $\omega^\alpha = \frac{c}{4} \eta^{\alpha\beta\gamma} \tilde{\Omega}_{\beta\gamma}$:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega^1 = \frac{c}{2} \frac{\tilde{\Omega}_{23}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\omega}{2} \frac{\alpha \rho z}{r^3 \left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2\right)} \\ \omega^2 = \frac{c}{2} \frac{\tilde{\Omega}_{31}}{\sqrt{\gamma}} = 0 \\ \omega^3 = \frac{c}{2} \frac{\tilde{\Omega}_{12}}{\sqrt{\gamma}} = \omega \frac{1 - \frac{\alpha}{r} - \alpha \frac{\rho^2}{2r^3}}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2}; \end{array} \right.$$

sua norma, $\omega^2 = \gamma_{\alpha\beta} \omega^\alpha \omega^\beta \equiv \frac{c^2}{8} \tilde{\Omega}_{\alpha\beta} \tilde{\Omega}^{\alpha\beta}$:

$$(15) \quad \omega^2 = \frac{\omega^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2\right)^2} \left[1 - \frac{\alpha}{r} \left(1 + 2 \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{9}{4} \alpha \frac{\rho^2}{r^3} \right) \right].$$

Tensore velocità di deformazione:

$$\tilde{K}_{\alpha\beta} \equiv \gamma^4 \partial_4 \gamma_{\alpha\beta} = 0.$$

Vettore di curvatura, $C_i \equiv \gamma^4 \Omega_{4i} \equiv \partial_i \log \sqrt{-g_{44}}$:

$$(16) \quad C_1 = \frac{\frac{\alpha \rho}{2r^3} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{\frac{\alpha z}{2r^3}}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2}.$$

Il riferimento adottato S_ω è dunque *rigido, rotazionale, non geodetico*: in esso è presente un campo gravitazionale di trascinamento G'_α così come un campo di Coriolis, G''_α . Dato il carattere stazionario di S_ω , al quale le coordinate scelte sono ben adattate, il campo $G'_\alpha = -c^2 C_\alpha$ dipende da un potenziale scalare in senso ordinario:

$$(17) \quad U \equiv -c^2 \log \sqrt{-g_{44}} = -c^2 \log \sqrt{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2}.$$

Se ci si limita a considerare una regione abbastanza ristretta attorno all'«asse» z ($\omega \rho \ll c$) ma anche sufficientemente lontana dalla massa centrale ($r \gg \alpha$) così che si possa ritenere

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2 \ll 1$$

si hanno, per il potenziale e per il campo di riposo, i valori approssimati [cfr. (2), (16) e (17)]

$$\left\{ \begin{array}{l} U \simeq \frac{1}{2} \left(\omega^2 \rho^2 + \alpha \frac{c^2}{r} \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 + k \frac{M}{r} \\ G'_1 \simeq \omega^2 \rho - \frac{1}{2} \alpha c^2 \frac{\rho}{r^3} = \omega^2 \rho - k \frac{M}{r^2} \frac{\rho}{r} \\ G'_2 = 0 \\ G'_3 \simeq -\frac{1}{2} \alpha c^2 \frac{z}{r^3} = -k \frac{M}{r^2} \frac{z}{r} \end{array} \right.$$

Ovviamente essi si confondono con il potenziale e il campo classico (centrifugo e newtoniano) confermando così il risultato approssimato di Thirring-Lense. Nella stessa approssimazione la norma del vettore velocità angolare di S_{ω} [cfr. (15)] viene a coincidere con ω^2 . Invece il potenziale e il campo si discostano sempre più dalle espressioni classiche a mano a mano che ci si avvicina al «contorno» del riferimento, cioè per $\frac{\alpha}{r} + \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2 \rightarrow 1$, ove essi divengono infiniti.

Si rilevi la circostanza notevole che la separazione netta tra il campo centrifugo e quello newtoniano che si presenta in prima approssimazione non sussiste nell'espressione esatta (17) ove essi sono più intimamente collegati.

Il problema di Thirring-Lense di determinare il campo gravitazionale einsteiniano all'esterno di una massa sferica rotante sembra così rigorosamente risolto.

4. VERIFICA DELLA EQUAZIONE RELATIVISTA DI GAUSS-POISSON. - Sulla espressione del potenziale esatto (17) si può controllare la validità della equazione di Gauss-Poisson (cfr. [7] e [8])

$$(18) \quad \Delta U \equiv g^{ik} \nabla_i \partial_k U = 2 \omega^2,$$

ove Δ indica il laplaciano *quadridimensionale*.

Per accertare la (18) basta evidentemente calcolare il primo membro cioè in sostanza ($\partial_i U = -c^2 C_i$) la divergenza del vettore di curvatura:

$$\nabla_i C^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} C^i),$$

essendo $g = \det(g_{ij}) \equiv g_{44} \Upsilon$, ovvero [cfr. (10 a)] $g = -\rho^2$.

D'altra parte dalla (8) si trae

$$g^{ij} \equiv \begin{vmatrix} 1 - \frac{\alpha \rho^2}{r^3} & 0 & -\frac{\alpha \rho z}{r^3} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2 & 0 & \frac{\omega}{c \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} \\ -\frac{\alpha \rho z}{r^3} & 0 & 1 - \frac{\alpha z^2}{r^3} & 0 \\ 0 & \frac{\omega}{c \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} & 0 & -\frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \end{vmatrix}$$

in modo che le componenti controvarianti del vettore di curvatura valgono [cfr. (16)]

$$\left\{ \begin{array}{l} C^1 = \frac{\frac{\alpha \rho}{2 r^3} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) + \frac{\omega^2}{c^2} \rho \left(\alpha \frac{\rho^2}{r^3} - 1\right)}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2} \\ C^2 = 0 \\ C^3 = \frac{\frac{\alpha z}{2 r^3} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) + \frac{\omega^2 \alpha \rho^2 z}{c^2 r^3}}{1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2} \\ C^4 = 0. \end{array} \right.$$

Di qui si ricava, con facili calcoli,

$$\Delta U = -\frac{c^2}{\rho} \left\{ \partial_e (\rho C^1) + \rho \partial_z C^3 \right\} = -\frac{c^2}{\left(1 - \frac{\alpha}{r} - \frac{\omega^2}{c^2} \rho^2\right)^2} \left\{ 2 \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \left(\alpha \frac{\rho^2}{r^3} - 1\right) \right. \\ \left. - \frac{\omega^2 \alpha^2 \rho^2}{2 c^2 r^4} + 2 \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \frac{\alpha \omega^2 \rho^2}{c^2 r^3} \right\}$$

cioè proprio [cfr. (15)]

$$\Delta U = 2 \omega^2.$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

- [1] C. CATTANEO, « Il Nuovo Cimento », 10 (1958).
- [2] — « Il Nuovo Cimento », 11 (1959).
- [3] — « Il Nuovo Cimento », 13 (1959).
- [4] — « Annali di Matematica », XLVIII (1959).
- [5] — « Rend. Accad. Lincei », XXVII, fasc. 1-2 (1959).
- [6] — « Rend. di Matematica », 20 [1-2] (1961).
- [7] — « Comptes rendus de l'Acad. des Sc. », 252 (1961).
- [8] — « Comptes rendus de l'Acad. des Sc. », 252 (1961).
- [9] — « Rend. Accad. Lincei », XXXII, fasc. 3, 346 (1962).
- [10] K. SCHWARZSCHILD, « Sitz. Preuss. Akad. Wiss. », 189 (1916 a).
- [11] H. THIRRING, « Physik. ZS. », 19, 33 (1918).
- [12] — « Physik. ZS. », 22, 29 (1921).
- [13] H. THIRRING e J. LENSE, « Physik. ZS. », 19, 156 (1918).