Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jenö Szép

Sulle strutture fattorizzabili

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.5, p. 649–652.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_5_649_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Matematica. — *Sulle strutture fattorizzabili.* Nota di JENÖ SZÉP, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Nella teoria dei gruppi fattorizzabili è spesso usato il seguente teorema (per esempio [1], [2], [3], [4]):

Se nel gruppo $G = AB$ *il sottogruppo* $D = A \cap B$ *contiene un sottogruppo normale* ($\neq 1$) di A *o di* B, *allora* G *non è semplice.*

Si trova facilmente – secondo quanto qui mostreremo – un teorema abbastanza generale, da cui segue fra l'altro il teorema sopra menzionato quale semplice applicazione.

Sia S una struttura algebrica con operazioni associative $\circ_1, \circ_2 \cdots$ Si dice che la struttura S è fattorizzabile rispetto alla operazione $\circ_i$, se esistono in S sottostrutture A, B tali che, per ogni elemento s di S, risulti

$$s = a \circ_i b \qquad (a \in A, b \in B).$$

In questo caso scriveremo che è:

$$S = A \circ_i B.$$

Siano gli pseudogruppi (strutture moltiplicative ed associative Θ $(= \alpha, \beta, \cdots)$ e Θ' $(= \alpha', \beta', \cdots)$, insiemi di operatori su S tali che

$$\Theta(A) \subseteq A \quad , \quad \Theta'(B) \subseteq B ;$$

cioè, per ogni operatore α di Θ ed α' di Θ', si abbia rispettivamente

$$\alpha(A) \subseteq A \quad , \quad \alpha'(B) \subseteq B .$$

Supponiamo inoltre che tutti questi operatori applichino tutte le sottostrutture di A e di B ancora in sottostrutture rispettivamente di A e di B.

Supponiamo infine che, per tutti gli operatori di Θ e Θ' dipendentemente dagli operatori si abbia:

$$(1) \qquad \alpha(s \circ_k s') = \alpha(s) \circ_k \alpha(s'), \qquad k = 1, 2, \cdots,$$

$$(2) \qquad \alpha'(s \circ_k s') = \alpha'(s) \circ_k \alpha'(s'), \qquad s, s' \in S.$$

o

$$(1') \qquad \alpha(s \circ_k s') = \alpha(s) \circ_k s'$$

$$(2') \qquad \alpha'(s \circ_k s') = \alpha'(s) \circ_k s'.$$

I prodotti formali $\alpha\alpha'$, $\alpha'\alpha$ possono venire interpretati in vari modi. Fissiamo specialmente l'attenzione sulle due seguenti possibilità (A) e (B):

$$(A) \qquad \alpha\alpha'(s) = \alpha(\alpha'(s)) \quad , \quad \alpha'\alpha(s) = \alpha'(\alpha(s))$$

(*) Nella seduta del 12 maggio 1962.

nel qual caso ammettiamo l'associatività ed in questo caso come pure nel caso (B) supponiamo inoltre che, per tutte le coppie $\alpha \in \mathcal{O}$, $\alpha' \in \mathcal{O}'$, esistano $\bar{\alpha}, \bar{\bar{\alpha}} \in \mathcal{O}$ e $\bar{\alpha}', \bar{\bar{\alpha}}' \in \mathcal{O}'$ tali che

$$\alpha\alpha'(s) = \bar{\alpha}'\,\bar{\alpha}(s) \quad , \quad \alpha'\alpha(s) = \bar{\bar{\alpha}}\,\bar{\bar{\alpha}}'(s); \tag{3}$$

$$\alpha\alpha'(s) = \bar{\alpha}(s) \circ_j \bar{\alpha}'(s) \quad , \quad \alpha'\alpha(s) = \bar{\bar{\alpha}}'(s) \circ_h \bar{\bar{\alpha}}(s), \tag{B}$$

dove $\circ_j$, $\circ_h$ sono operazioni fissate tra le $\circ_1, \circ_2, \cdots$. (Se $\alpha\alpha'$ e $\alpha'\alpha$ non hanno un senso, allora (B) è una definizione di quelli, dove $\bar{\alpha}, \bar{\alpha}', \bar{\bar{\alpha}}, \bar{\bar{\alpha}}'$ sono funzioni di α e α').

TEOREMA 1. – *Se entro la struttura* $S = A \circ_i B$ *per la sottostruttura* $D' \subseteq D = A \cap B$ *risulta*

$$\mathcal{O}'(D') \subseteq D', \tag{4}$$

allora, per la sottostruttura $\{D', \alpha(D'), \beta(D'), \cdots\} = A' \subseteq A$ *(generata dalle* $D', \alpha(D'), \beta(D'), \cdots$*), si ha:*

$$\mathcal{O}(A') \subseteq A' \quad , \quad \mathcal{O}'(A') \subseteq A' \quad , \quad \mathcal{O}\mathcal{O}'(A') \subseteq A' \quad , \quad \mathcal{O}'\mathcal{O}(A') \subseteq A'.$$

Dimostrazione. – È evidente che

$$\mathcal{O}(A') \subseteq A', \tag{5}$$

poiché $\mathcal{O}$ è un pseudogruppo, sicché $\beta\alpha(D') = \gamma(D') \subseteq A'$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{O})$ onde secondo le (1) e (1') vale la (5).

Anche nei casi (A) e (B) possiamo vedere facilmente che è:

$$\mathcal{O}'(A') \subseteq A'. \tag{6}$$

Nel caso (A) si ha infatti:

$$\alpha'(\alpha(d') \circ_i \beta(d'')) = \alpha'\alpha(d') \circ_i \alpha'\beta(d'') =$$
$$= \bar{\alpha}\bar{\alpha}'(d') \circ_i \bar{\beta}\bar{\bar{\alpha}}'(d'') = \bar{\alpha}(\bar{d}') \circ_i \bar{\beta}(\bar{d}'') \in A',$$

dove

$$\alpha', \bar{\alpha}', \bar{\bar{\alpha}}' \in \mathcal{O}' \quad ; \quad \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{O} \quad ; \quad d', d'', \bar{d}', \bar{d}'' \in D'.$$

La dimostrazione è simile anche rispetto a (1') e (2').

Mentre nel caso (B) risulta

$$\alpha'\alpha(d') = \bar{\alpha}'(d') \circ_h \bar{\alpha}(d') \in A',$$

da cui segue la (6).

Dimostriamo ora la relazione

$$\mathcal{O}\mathcal{O}'(A') \subseteq A'. \tag{7}$$

Nel caso (A), applicando la (6) otteniamo:

$$\alpha\alpha'(\beta(d') \circ_i \gamma(d'')) = \bar{\alpha}'\,\bar{\alpha}(\beta(d') \circ_i \gamma(d'')) =$$
$$= \bar{\alpha}'(\bar{\alpha}\,\beta(d') \circ_i \bar{\alpha}\,\gamma(d'')) = \bar{\alpha}'(\bar{\bar{\alpha}}(d') \circ_i \bar{\bar{\bar{\alpha}}}(d'')) \in A'.$$

Nel caso (B), tenuto conto delle (5), (6) si ha:

$$\alpha\alpha'(\beta(d') \circ_i \gamma(d'')) = \bar{\alpha}(\beta(d') \circ_i \gamma(d'')) \circ_j \bar{\alpha}'(\beta(d') \circ_i \gamma(d'')) \in A'.$$

Similmente possiamo dimostrare la $\Theta' \Theta (A') \subseteq A'$ ed anche rispetto a (1′) e (2′).

OSSERVAZIONE. – Dal teorema 1 segue che è $\Theta\Theta (A') \subseteq A'$ e poi del pari $\Theta\Theta' \Theta\Theta' \cdots (A') \subseteq A'$, $\Theta' \Theta\Theta' \Theta \cdots (A') \subseteq A'$, dove $\Theta\Theta' \Theta\Theta' \cdots$, $\Theta' \Theta\Theta' \Theta \cdots$ risultano da composizioni finite degli insiemi Θ, Θ'.

Se gli operatori di Θ e Θ' sono operatori bilaterali su S con condizioni analoghe alle (1), (2), (A), (B) e con

$$\Theta (A) \Theta \subseteq A \quad , \quad \Theta' (B) \Theta' \subseteq B ,$$

nel qual caso supponiamo che sia

$$(\Theta (S)) \Theta = \Theta ((S) \Theta) \quad , \quad (\Theta' (S)) \Theta' = \Theta' ((S) \Theta') \quad , \quad (\Theta (S)) \Theta' = \Theta ((S) \Theta') ,$$

$$(\Theta' (S)) \Theta = \Theta' ((S) \Theta)$$

allora vale il seguente:

TEOREMA 2. – *Se per la sottostruttura* $D' \subseteq D = A \cap B$ *di* $S = A \circ_i B$ *risulta*

$$\Theta' (D') \Theta' \subseteq D'$$

(*cioè* $\alpha' (D') \subseteq D'$, $(D') \alpha' \subseteq D'$, $\alpha' (D') \beta' \subseteq D'$), *allora per la sottostruttura* $\{D', \alpha (D'), \cdots, (D') \alpha, \cdots, \alpha (D') \beta, \cdots\} = A' \subseteq A$ *valgono le* $\Theta (A') \subseteq A'$, $(A') \Theta \subseteq A'$, $\Theta'(A') \subseteq A'$, $(A') \Theta' \subseteq A'$, $\Theta\Theta'(A') \subseteq A'$, $(A') \Theta\Theta' \subseteq A'$, $\Theta\Theta'(A') \Theta \subseteq A'$, $\cdots$.

La dimostrazione è simile a quella indicata per il teor. 1.

APPLICAZIONI.

1. Sia $G = AB$ un gruppo fattorizzabile. Assumiamo in ciò che precede $\Theta \equiv A$, $\Theta' = B$

$$a (g) = ag a^{-1} \quad , \quad b (g) = bb^{-1} gb^{-1} \qquad (a \in A , b \in B , g \in G).$$

Poiché sussistono le condizioni del caso (A), così:

se $D' \subseteq D = A \cap B$ *è un sottogruppo normale di* B, *allora* G *ammette un sottogruppo normale* $A' \subseteq A$.

2. Sia $F = AB = BA$ uno pseudogruppo. Assumiamo ora $\Theta \equiv A$, $\Theta' = B$, $a (f) = af$, $b (f) = bf$ $(a \in A , b \in B , f \in F)$. Poiché sussistono le condizioni del caso (A), così:

se $D' \subseteq D = A \cap B$ $(D' \neq A , B)$ *è un ideale sinistro* (*destro*) *proprio in* B, *allora* F *ammette un ideale sinistro* (*destro*) *proprio* $A' \subseteq A$.

Applicando poi il teor. 2, vediamo che:

se $D' \subseteq D = A \cap B$ $(D' \neq A , B)$ *è un ideale in* B, *allora* F *ammette un ideale proprio* $A' \subseteq A$.

3. Sia $R = A + B$ un anello (fattorizzabile), cioè un anello in cui ogni elemento $x \in R$ si può scrivere nella forma $a + b$, dove $a \in A$, $b \in B$. Assu-

miamo ora, $\mathcal{O} \equiv A$, $\mathcal{O}' \equiv B$, $a(x) = ax$, $b(x) = bx$. Poiché sussistono le condizioni del caso (B) (con $o_j \equiv o_h \equiv +$), otteniamo che:

se $D' \subseteq D = A \cap B$, $(D' \neq A, B)$ *è un ideale sinistro* (*destro*) *proprio in* B, *allora* R *contiene un ideale sinistro* (*destro*) *proprio* $A' \subseteq A$.

Applicando ancora il teorema 2, ne risulta che:

se $D' \subseteq D = A \cap B$, $(D' \neq A, B)$ *è un ideale proprio in* B, *allora* R *contiene un ideale proprio* $A' \subseteq A$.

Bibliografia.

[1] N. Ito, *Remarks of factorisable groups*, « Acta Sci. Math. », *14*, 83–84 (1951).

[2] B. Huppert, N. Ito, *Über die Auflösbarkeit faktorisierbarer Gruppen I, II*, « Math. Zeitschrift », *59*, 1–7 (1953); *61*, 94–99 (1954).

[3] J. Szép, *Über die Nichteinfachheit von faktorisierbaren Gruppen*, « Acta Sci. Math. », *21*, 247–250 (1960).

[4] H. Wielandt, *Über die Normalstruktur von mehrfach faktorisierten Gruppen*, « The Journal of the Australian Math. Soc. », I, 143–146 (1960).