Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Tallini

Una proprietà in grande delle varietà a connessione affine compatte con applicazioni alle varietà a connessione proiettiva

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.5, p. 644–648.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_5_644_0¿

Geometria. — *Una proprietà in grande delle varietà a connessione affine compatte con applicazioni alle varietà a connessione proiettiva* (*). Nota di GIUSEPPE TALLINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

1. Su una varietà differenziabile V_n – che in seguito supporremo sempre di classe c^s ($s \geq 3$) – due connessioni affini si diranno, col Weyl [5] p. 100, proiettivamente equivalenti, quando ammettono le stesse linee autoparallele. Scopo principale della presente Nota è quello di mettere in luce proprietà in grande delle connessioni affini simmetriche proiettivamente equivalenti ad una data connessione riemanniana, su una V_n orientabile e compatta. Dimostreremo precisamente nel n. 3 che:

PROPOSIZIONE I. – *Denotati con* g_{jk}, Γ *e* R_{jk} *rispettivamente il tensore metrico, la connessione e il tensore di Ricci di una* V_n *riemanniana orientabile e compatta, e con* $\overline{R}_{jk}$ *il tensore di Ricci di una qualsiasi connessione affine simmetrica* $\overline{\Gamma}$ *di* V_n, *proiettivamente equivalente a* Γ, *se risulta*

$$\int_{V_n} g^{jk} (\overline{R}_{jk} - R_{jk})\, dv \leq 0$$

(*dv denotando l'elemento di volume della metrica riemanniana*), *necessariamente* Γ *e* $\overline{\Gamma}$ *coincidono.*

Dalla Proposizione I si deducono immediatamente i seguenti corollari.

COROLLARIO I. – *Se, su una* V_n *orientabile e compatta, una connessione riemanniana* Γ *e una connessione simmetrica* $\overline{\Gamma}$ *ammettono le stesse linee autoparallele e lo stesso tensore di Ricci, esse coincidono.*

COROLLARIO II. – *Con le notazioni della proposizione I, posto* $k_{jk} = \overline{R}_{jk} - R_{jk}$, *se la forma* $k_{(jk)} \xi^j \xi^k$ (1) *è semidefinita negativa su tutta* V_n, *allora* $\Gamma \equiv \overline{\Gamma}$.

COROLLARIO III. – *Se su una* V_n *orientabile e compatta due connessioni riemanniane proiettivamente equivalenti,* Γ *e* $\overline{\Gamma}$, *sono tali che* $k_{jk} \xi^j \xi^k$ ($k_{jk} = \overline{R}_{jk} - R_{jk}$) *risulta una forma semidefinita, positiva o negativa, allora* $\Gamma \equiv \overline{\Gamma}$.

Notiamo che in quanto precede l'ipotesi della compattezza è essenziale, potendosi facilmente dare esempi in contrario nel caso non compatto: infatti, nell'aperto A costituito dai punti interni ad una ipersuperficie sferica di un E_n euclideo, si può definire una metrica non euclidea di tipo iperbolico al modo di Cayley–Klein, le autoparallele essendo segmenti di rette ed il tensore di Ricci determinando una forma quadratica definita negativa; d'altra parte, in

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca del C.N.R. n. 17.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1962.

(1) Con $k_{(jk)}$ si denota il tensore ottenuto da k_{jk} per simmetrizzazione. Si osservi che in generale, mentre $R_{(jk)}$ è simmetrico, non è detto che lo sia $\overline{R}_{jk}$.

A si ha anche una metrica euclidea, la quale ammette le stesse autoparallele della metrica precedente ed ha nullo il tensore di Ricci; ciò tuttavia non è in contrasto con il Corollario III, causa la non compattezza di A.

Per dimostrare la Proposizione I ci serviremo del seguente teorema, stabilito nel n. 2.

TEOREMA I. – *Su una V_n riemanniana orientabile e compatta, di cui g_{jk}, Γ e R_{jk} denotano rispettivamente il tensore metrico, la connessione e il tensore di Ricci, sia data una qualsiasi connessione $\overline{\Gamma}$ (anche non simmetrica) soggetta alla sola condizione che il tensore $T^i_{jk} = \overline{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}$ soddisfi, su tutta V_n alla*

$$f(T) = g^{jk}(T^s_{jk}T^t_{st} - T^s_{jt}T^t_{sk}) \geq 0 \quad (\leq 0),$$

dove il segno d'uguaglianza possa aversi se, e soltanto se, T^i_{jk} è nullo. Ebbene, detto $\overline{R}_{jk}$ il tensore di Ricci relativo a $\overline{\Gamma}$, se inoltre risulta

$$\int_{V_n} g^{jk}(\overline{R}_{jk} - R_{jk})\, dv \leq 0 \quad (\geq 0),$$

allora $\Gamma \equiv \overline{\Gamma}$.

Dal precedente Teorema dedurremo infine, nel n. 4, la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE II. – *Si consideri su una V_n riemanniana orientabile e compatta, di cui denoteremo con g_{jk}, Γ, R_{jk} rispettivamente il tensore metrico, la connessione e il tensore di Ricci, una qualunque delle connessioni*

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \xi^i \gamma_{jk},$$

essendo γ_{jk} i coefficienti di una forma quadratica definita positiva su tutta V_n e ξ^i un vettore. Ebbene, se risulta

$$\int_{V_n} g^{jk}(\overline{R}_{jk} - R_{jk})\, dv \leq 0,$$

$\overline{R}_{jk}$ essendo il tensore di Ricci relativo a $\overline{\Gamma}$, allora $\Gamma \equiv \overline{\Gamma}$.

Consideriamo inoltre su V_n una qualunque delle connessioni

$$\mathring{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \xi^i F_{jk},$$

ove F_{jk} è un tensore emisimmetrico per cui $\det \| F_{jk} \| \neq 0$, onde $n = 2m$. Ebbene, se risulta

$$\int_{V_n} g^{jk}(\mathring{R}_{jk} - R_{jk})\, dv \leq 0,$$

$\mathring{R}_{jk}$ denotando il tensore di Ricci relativo a $\mathring{\Gamma}$, allora $\Gamma \equiv \mathring{\Gamma}$.

2. Sia V_n una varietà differenziabile di classe c^s ($s \geq 3$) (cfr. per esempio [3] p. 109, [1] p. 2). In base ad un noto teorema di Whitney [6], è sempre possibile dotare V_n di una struttura riemanniana di classe c^{s-1}. Denoteremo

con g_{ij} il tensore metrico di una siffatta fissata struttura, con Γ^i_{jk} i simboli di Christoffel, con R^i_{jkl} il tensore di curvatura, e, se $u^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ è un tensore di V_n, con $u^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q / k}$ il tensore derivato rispetto a Γ^i_{jk}.

Una qualsiasi connessione affine $\overline{\Gamma}^i_{jk}$ di classe c^{s-2} di V_n è allora – com'è noto – data da:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + T^i_{jk}, \tag{1}$$

ove T^i_{jk} è un tensore di classe c^{s-2}. Denoteremo con $\overline{R}^i_{jkl}$ il tensore di curvatura relativo a $\overline{\Gamma}^i_{jk}$. In seguito, la derivazione sarà però sempre effettuata rispetto a Γ^i_{jk}.

Per definizione è:

$$\overline{R}^i_{jkl} = \partial_l \overline{\Gamma}^i_{jk} - \partial_k \overline{\Gamma}^i_{jl} + \overline{\Gamma}^s_{jk} \overline{\Gamma}^i_{sl} - \overline{\Gamma}^s_{jl} \overline{\Gamma}^i_{sk},$$

da cui, in forza di (1) e tenendo presente che $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$, si ottiene con facili calcoli:

$$\overline{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl} + T^i_{jk/l} - T^i_{jl/k} + T^s_{jk} T^i_{sl} - T^s_{jl} T^i_{sk}. \tag{2}$$

Dalla (2) si ha poi

$$\overline{R}_{jk} = \overline{R}^s_{jks} = R_{jk} + T^s_{jk/s} - T^s_{js/k} + T^s_{jk} T^t_{st} - T^s_{jt} T^t_{sk} \tag{3}$$

e quindi:

$$g^{jk} (\overline{R}_{jk} - R_{jk}) = g^{jk} T^s_{jk/s} - g^{jk} T^s_{js/k} + g^{jk} (T^s_{jk} T^t_{st} - T^s_{jt} T^t_{sk}). \tag{4}$$

Posto $u^h = g^{jk} T^h_{jk}$, $v^k = g^{jk} T^s_{js}$, si ha div $u = u^s{}_{/s} = g^{jk} T^s_{jk/s}$, div $v = v^k{}_{/k} = g^{jk} T^s_{js/k}$; dunque, se la V_n risulta orientabile e compatta, in forza del teorema della divergenza (cfr. per esempio [7] p. 31), dalla (4) si ottiene, dv denotando l'elemento di volume relativo alla struttura riemanniana,

$$\int_{V_n} g^{jk} (\overline{R}_{jk} - R_{jk})\, dv = \int_{V_n} g^{jk} (T^s_{jk} T^t_{st} - T^s_{jt} T^t_{sk})\, dv. \tag{5}$$

Supponiamo ora che il tensore T sia tale che su tutta V_n risulti:

$$f(T) = g^{jk} (T^s_{jk} T^t_{st} - T^s_{jt} T^t_{sk}) \geq 0 \quad (\leq 0), \tag{6}$$

il segno d'uguaglianza valendo se, e soltanto se, sia $T^i_{jk} = 0$. Allora, se è:

$$\int_{V_n} g^{jk} (\overline{R}_{jk} - R_{jk})\, dv \leq 0 \quad (\geq 0), \tag{7}$$

dalla (5) si ha:

$$\int_{V_n} g^{jk} (T^s_{jk} T^t_{st} - T^s_{jt} T^t_{sk})\, dv = 0$$

e quindi, sempre per la (6), $f(T) = 0$, ossia $T^i_{jk} = 0$, onde $\overline{\Gamma}^i_{jk} \equiv \Gamma^i_{jk}$. Ne segue il Teorema I del n. 1.

3. La totalità delle connessioni simmetriche, $\overline{\Gamma}$, proiettivamente equivalenti alla connessione riemanniana Γ è data da (cfr. per esempio [4] p. 213).

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \psi_k + \delta^i_k \psi_j ,$$

ove δ^i_j denotano i simboli di Kronecker e ψ_k sono le componenti di un vettore covariante di classe c^{s-2}. Posto

$$T^i_{jk} = \delta^i_j \psi_k + \delta^i_k \psi_j ,$$

si ha evidentemente che T^i_{jk} è nullo se, e soltanto se, tale è il vettore ψ_k. D'altra parte, un facile calcolo mostra che è:

$$f(T) = g^{jk}(T^s_{jk} T^t_{st} - T^s_{jt} T^t_{sk}) = (n-1) g^{jk} \psi_j \psi_k \geq 0,$$

il segno d'uguaglianza valendo se, e soltanto se, è $\psi_k = 0$ e quindi $T^i_{jk} = 0$. In forza del Teorema I n. 1, precedentemente dimostrato, segue allora la Proposizione I n. 1.

4. Sulla V_n riemanniana di cui nel n. 2, consideriamo una qualunque delle connessioni $\overline{\Gamma}$ date da:

$$\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \xi^i \gamma_{jk} ,$$

essendo γ_{jk} i coefficienti, di classe c^{s-2}, di una forma quadratica definita positiva su tutta V_n e ξ^i le componenti di un vettore contravariante di classe c^{s-2}. Posto

$$T^i_{jk} = \xi^i \gamma_{jk} ,$$

si ha che T^i_{jk} è nullo se, e soltanto se, tale è il vettore ξ^i. Un facile calcolo mostra poi che è:

$$f(T) = g^{jk}(T^s_{jk} T^t_{st} - T^s_{jt} T^t_{sk}) = g^{jk}(\gamma_{jk}\gamma_{st} - \gamma_{js}\gamma_{kt}) \xi^s \xi^t . \tag{8}$$

Posto $h_{st} = g^{jk}(\gamma_{jk}\gamma_{st} - \gamma_{js}\gamma_{kt})$, *la forma quadratica $h_{st} \xi^s \xi^t$ risulta definita positiva su tutta V_n.* Infatti, essendo g^{jk} e γ_{jk} coefficienti di forme quadratiche definite positive su V_n, si possono sempre scegliere – come è noto – in un opportuno intorno di un qualunque fissato punto P di V_n, coordinate tali che simultaneamente si abbia $g^{jk} = \delta^{jk}$ e $\gamma_{st} = c_s \delta_{st}$, con $c_s > 0$. In P, nel fissato riferimento, si avrà allora:

$$h_{st} = \delta^{jk}(c_j c_s \delta_{jk} \delta_{st} - c_j c_k \delta_{js} \delta_{kt}) = c_s \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} c_k \right) \delta_{st} ,$$

ed essendo $c_s \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} c_k \right) > 0$ (in quanto $c_s > 0$ e $n > 1$), si vede che le h_{st} sono, in P, i coefficienti di una forma quadratica definita positiva; dall'arbitrarietà di P, segue così l'asserto. Dalla (8) si trae inoltre che $f(T) \geq 0$, il segno d'uguaglianza avendosi se, e soltanto se, è $\xi^i = 0$ e quindi $T^i_{jk} = 0$.

In forza del Teorema I n. 1, precedentemente dimostrato, segue allora la prima parte della Proposizione II del n. 1.

Consideriamo ora sulla V_n una qualunque delle connessioni $\overset{\approx}{\Gamma}$ date da:

$$\overset{\approx}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \xi^i \, F_{jk} ,$$

ove F_{jk} sono le componenti di un tensore emisimmetrico, di classe c^{s-2}, per cui $\det \| F_{jk} \| \neq 0$ su tutta V_n (onde $n = 2m$), ξ^i denotando ancora le componenti di un vettore contravariante di classe c^{s-2}. Posto

$$T^i_{jk} = \xi^i \, F_{jk} ,$$

si ha che T^i_{jk} è nullo se, e soltanto se, tale e ξ^i. Un facile calcolo mostra che, in virtù dell'emisimmetria di F_{jk}, è:

$$f(T) = g^{jk} \left(T^s_{jk} \, T^t_{st} - T^s_{jt} \, T^t_{sk} \right) = g^{jk} \left(F_{js} \, \xi^s \right) \left(F_{ks} \, \xi^s \right) \geq 0 .$$

Il segno d'uguaglianza nella precedente relazione vale se, e soltanto se, risulta $F_{js} \, \xi^s = 0$ e quindi $\xi^s = 0$ (essendo $\det \| F_{jk} \| \neq 0$), cioè $T^i_{jk} = 0$. In forza del Teorema I, segue allora anche la seconda parte della Proposizione II.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. LICHNÉROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese Ed., Roma 1955.

[2] A. LICHNÉROWICZ, *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris 1958.

[3] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, vol. II, Docet, Roma 1956.

[4] G. VRANCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, L'imprimerie « Rotative », Bucarest 1947.

[5] H. WEYL, *Zur Infinitesimalgeometrie, Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung*, Göttinger Nachrichten 1921.

[6] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds*, « Ann. of Math. » (2), *37*, pp. 645–680 (1936).

[7] K. YANO AND S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, Princeton Univ. Press, 1953.