Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Vaccaro

Sopra alcune classi di rigate iperspaziali

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.5, p. 635–643.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_5_635_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Geometria. — *Sopra alcune classi di rigate iperspaziali* (*). Nota di GIUSEPPE VACCARO, presentata(**) dal Socio A. TERRACINI.

1. – INTRODUZIONE.

In una Nota precedente [1], che nel seguito verrà indicata con I, ricollegandomi ad alcuni lavori di A. Terracini [2], ho esaminato alcuni tipi di rigate dello spazio ordinario che si possono definire a partire da una retta s e da una proiettività σ fra la punteggiata su s ed il fascio di piani per s (elemento del 1° ordine di rigata): ho indicato questa configurazione con (s, σ).

Come già annunciato in quella Nota, mi propongo ora di esaminare questioni analoghe per rigate iperspaziali. Quì la mèsse dei risultati è molto maggiore come è già da attendersi dai diversi caratteri che le rigate presentano negli spazi di dimensione pari e in quelli di dimensione dispari; ma anche per la molteplicità delle configurazioni che possono porsi a base di questo studio.

In questa Nota esamino dapprima alcune classi di rigate appartenenti ad un S_5, definite a partire da tre diverse configurazioni, le quali sono gli equiventi in termini finiti di elementi differenziali del 1° o del 2° ordine di rigata, oppure sono da questi definiti (nn. 2, 3, 4). Dopo aver mostrato come le considerazioni svolte si possono estendere (ed in più modi) ad uno spazio di dimensione dispari qualunque (n. 5), passo a considerare (nn. 6, 7, 8) alcuni tipi di rigate di S_4 definite a partire da una configurazione che in questo caso non è equivalente ad un elemento differenziale di rigata; ed infine (n. 9) mostro come il procedimento si possa estendere ad uno spazio di dimensione pari qualunque.

2. – RIGATE IN S_5.

Consideriamo in S_5 una rigata di 1° indice di sviluppabilità 3 (massimo valore possibile) [3]. In relazione ad una sua generatrice s sono determinati:

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 1 del C.N.R. per l'anno 1961–62.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1962.

(1) Cfr. G. VACCARO, *Sopra alcune classi di superficie rigate nello spazio ordinario*, in corso di stampa in questi « Rendiconti ».

(2) Cfr. A. TERRACINI, *Una nuova caratterizzazione delle rigate di un complesso lineare*, « Boll. U.M.I. », ser. III, a. XVI, pp. 332–339 (1961); *Sur une classe particulière de surfaces reglées*, « Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liège », t. XXXI, pp. 9–14 (1961).

(3) La nozione di indici di sviluppabilità di una rigata iperspaziale è stata introdotta da E. BOMPIANI, *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XXXVII (1914), pp. 305–331. Qui ricordiamo, in particolare, che il primo indice di sviluppabilità dà il massimo numero di generatrici infinitamente vicine indipendenti.

1) lo spazio Σ_1 di dimensione 3 contenente i piani tangenti alla rigata nei punti della generatrice (spazio tangente lungo la generatrice); 2) la proiettività (di Chasles), σ_1, fra la punteggiata su s e il fascio di piani tangenti per s in Σ_1; 3) la proiettività σ_2 fra i punti di s e gli $S_4 \equiv S(2)$–osculatori in essi, tutti contenenti Σ_1.

La configurazione (s, Σ_1, σ_1) è l'equivalente in termini finiti dell'elemento differenziale del 1° ordine di rigata $\mathfrak{E}^1$; la configurazione $(s, \Sigma_1, \sigma_1, \sigma_2)$ è l'equivalente dell'elemento del 2° ordine $\mathfrak{E}^2$ di rigata. La configurazione (s, Σ_1, σ_2) è definita da un $\mathfrak{E}^2$ di rigata, ma inversamente non lo definisce (4).

Consideriamo separatamente queste tre configurazioni e una rigata R descritta da una generatrice $g(t)$, per t variabile in un intervallo assegnato e $g(t)$ (cioè le sue coordinate grassmaniane) di classe di differenziabilità C^1, C^2, C^3 secondo i problemi.

I. *Configurazione* (s, Σ_1, σ_1). – Si facciano le costruzioni seguenti: sia un punto $P \in s$, Γ_g lo S_3 tangente lungo g ad R, $g_1(t) = \Gamma_g \cap \Sigma_1$: la retta $g_1(t)$ descrive entro Σ_1 una rigata R_1; questa determina su s, in relazione a g_1, quindi a g, operando come in I, una proiettività ω_g^1 (che dipende dallo $\mathfrak{E}^2$ di R relativo a g).

II. *Configurazione* (s, Σ_1, σ_2). – Il punto $P \in s$ determina lo $S_4 = \sigma_2 P$; questo sega una $g \in R$ in un punto $P_g = g \cap \sigma_2 P$. Lo $S_4^{P_g}$ 2–osculatore ad R in P_g sega s in $\overline{P}$; la corrispondenza $P \longleftrightarrow \overline{P}$ così determinata su s è una proiettività ω_g^2 (dipendente dallo $\mathfrak{E}^2$ di R relativo a g).

III. *Configurazione* $(s, \Sigma_1, \sigma_1, \sigma_2)$. – Dato $P \in s$ si determini come nel caso precedente $S_4 = \sigma_2 P$ e $P_g = g \cap \sigma_2 P$. Il piano tangente in P_g ad R, τ_{P_g} incontra Σ_1 in un punto: $\tilde{P}_g = \tau_{P_g} \cap \Sigma_1$; il piano $s \cup \tilde{P}_g$ è il corrispondente per σ_1 di un punto $\overline{P}$ di s: $\overline{P} = \sigma_1^{-1}(s \cup \tilde{P}_g)$. La corrispondenza $P \longleftrightarrow \overline{P}$ così determinata su s è una proiettività ω_g^3 (dipendente soltanto dall'$\mathfrak{E}^1$ di R relativo a g).

Ciascuna delle proiettività $\omega_g^1, \omega_g^2, \omega_g^3$, al variare di g descrive un sistema ∞^1; a ciascuno dei sistemi così ottenuti si possono imporre le condizioni già imposte al sistema ∞^1 delle ω_g nella Nota I ottenendo classi notevoli di superficie rigate in S_5.

Allo scopo di esplicitare queste condizioni procuriamoci le equazioni delle proiettività $\omega_g^1, \omega_g^2, \omega_g^3$.

3. – Equazioni delle proiettività introdotte.

In S_5 scegliamo il riferimento in modo di avere le seguenti rappresentazioni:

$$(3.1)\quad \begin{cases} s: x^3 = x^4 = x^5 = x^6 = 0 \quad ; \quad \Sigma_1: x^5 = x^6 = 0 \quad ; \quad P: \lambda, 1, 0, 0, 0, 0 \\ \sigma_1 P: x^3 = \lambda x^4 \ , \ x^5 = x^6 = 0 \quad ; \quad \sigma_2 P: x^5 = \lambda x^6. \end{cases}$$

(4) Per tutte queste nozioni cfr. il lavoro di E. Bompiani sopra citato.

Indichiamo con $g^{ik}(t)$ $(i, k = 1, 2, \cdots, 6)$ le coordinate (radiali) di $g(t)$ e facciamo l'ipotesi che tutte le $g(t)$ siano sghembe con s; ciò porta $g^{56} \neq 0$ e poiché si tratta di coordinate omogenee possiamo sempre fare $g^{56} = 1$.

Indicando con $\dot{g}^{ik}$ le derivate prime delle g^{ik} rispetto a t (quindi $\dot{g}^{56} = 0$), lo spazio $S_3 = \Gamma_g$ tangente lungo g ad R ha equazioni che si ottengono scrivendo che la matrice

$$
\begin{pmatrix}
x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\
g^{15} & g^{25} & g^{35} & g^{45} & 0 & -1 \\
g^{16} & g^{26} & g^{36} & g^{46} & 1 & 0 \\
\dot{g}^{15} & \dot{g}^{25} & \dot{g}^{35} & \dot{g}^{45} & 0 & 0 \\
\dot{g}^{16} & \dot{g}^{25} & \dot{g}^{36} & \dot{g}^{46} & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{3.2}
$$

ha rango 5; mentre il fatto che Γ_g è un S_3 porta che la matrice

$$
\begin{pmatrix}
\dot{g}^{15} & \dot{g}^{25} & \dot{g}^{35} & \dot{g}^{45} \\
\dot{g}^{16} & \dot{g}^{26} & \dot{g}^{36} & \dot{g}^{46}
\end{pmatrix}
\tag{3.3}
$$

ha rango 2.

L'ulteriore ipotesi che Γ_g *non* incontri s aggiunge che:

$$
\begin{vmatrix}
\dot{g}^{35} & \dot{g}^{45} \\
\dot{g}^{36} & \dot{g}^{46}
\end{vmatrix} \neq 0
\tag{3.4}
$$

in tutto l'intervallo assegnato per t.

Le coordinate della retta $g_1 = \Sigma_1 \cap \Gamma_g$ si estraggono dalla matrice (3.3); precisamente per $i, k = 1, 2, 3, 4$:

$$
g_1^{ik} = \dot{g}^{ik}\,\dot{g}^{k6} - \dot{g}^{i6}\,\dot{g}^{k5}, \qquad (g_1^{i5} = g_1^{i6} = g_1^{56} = 0)
\tag{3.5}
$$

e la (3.4) può scriversi ora $g_1^{34} \neq 0$.

Le coordinate di un punto di g sono:

$$
x^i = g^{i5} + \mu g^{i6} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 \; , \; x^5 = \mu \; , \; x^6 = -1;
\tag{3.6}
$$

le equazioni dello S_2 tangente in questo punto ad R si ottengono scrivendo che la matrice

$$
\begin{pmatrix}
x^i & x^5 & x^6 \\
g^{i5} & 0 & -1 \\
g^{i6} & 1 & 0 \\
\dot{g}^{i5} + \mu \dot{g}^{i6} & 0 & 0
\end{pmatrix}
\tag{3.7}
$$

è di rango 3.

L'equazione dello $S_4 \equiv S\,(2)$–osculatore nello stesso punto è ($i = 1, 2, 3, 4$):

$$
(3.8) \qquad \begin{vmatrix} x^i & x^5 & x^6 \\ g^{i5} & 0 & -1 \\ g^{i6} & 1 & 0 \\ \dot{g}^{15} & 0 & 0 \\ \dot{g}^{16} & 0 & 0 \\ \ddot{g}^{i5} + \mu\ddot{g}^{16} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .
$$

Determiniamo ora la proiettività ω_g^1.

Un punto delle rette g_1 ha coordinate:

$$
y^i = g_1^{13} + \nu g_1^{14} \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4 \;;\; y^5 = y^6 = 0 ;
$$

esso appartiene al piano σ_1 P: $x^3 = \lambda\, x^4$, $x^5 = x^6 = 0$ per $\nu = -\lambda$; cioè esso è il punto $y^i = g_1^{i3} - \lambda\, g_1^{i4}$, $y^5 = y^6 = 0$.

Il piano tangente in questo punto alla rigata R_1 descritta da g_1 ha in Σ_1 ($x^5 = x^6 = 0$) l'equazione:

$$
(3.9) \qquad \begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ g_1^{13} & g_1^{23} & 0 & -g_1^{34} \\ g_1^{14} & g_1^{24} & g_1^{34} & 0 \\ \dot{g}_1^{13} - \lambda\dot{g}_1^{14} & \dot{g}_1^{23} - \lambda\dot{g}_1^{24} & -\lambda\dot{g}_1^{34} & -\dot{g}_1^{34} \end{vmatrix} = 0 .
$$

L'intersezione di questo con la retta s è il punto $\bar{P}\,(\bar{\lambda}, 1, 0, 0)$ per cui:

$$
(3.10) \qquad \bar{\lambda} = \frac{\dot{g}_1^{13} g_1^{34} - g_1^{13} \dot{g}_1^{34} - \lambda\left(\dot{g}_1^{14} g_1^{34} - g_1^{14} \dot{g}_1^{34}\right)}{\dot{g}_1^{23} g_1^{34} - g_1^{23} \dot{g}_1^{34} - \lambda\left(\dot{g}_1^{24} g_1^{34} - g_1^{24} \dot{g}_1^{34}\right)} .
$$

L'*equazione* (3.10) *ora scritta rappresenta la proiettività* ω_g^1 *determinata dalla configurazione* (s, Σ_1, σ_1).

Essa dipende dall'$\mathfrak{E}^2$ di R determinato da g perché attraverso le g_1^{ik}, $\dot{g}_1^{ik}$ entrano nell'equazione precedente le g^{ik}, $\dot{g}^{ik}$, $\ddot{g}^{ik}$.

L'equazione precedente può semplificarsi normalizzando il parametro t. Infatti per la (3.4) è ($g_1^{34} \neq 0$ cioè):

$$
\frac{dg^{35}\, dg^{46} - dg^{36}\, dg^{45}}{dt^2} \neq 0
$$

e poiché cambiando t in $t'\,(t)$:

$$
\frac{dg^{35}\, dg^{46} - dg^{36}\, dg^{45}}{dt^2} = \frac{dg^{35}\, dg^{46} - dg^{36}\, dg^{45}}{dt'^2} \, \frac{dt'^2}{dt^2} ,
$$

si può scegliere il parametro t' (che risulta determinato a meno del segno e di una costante additiva) in modo che g_{I}^{34} (calcolato per esso) sia $= 1$. Indicato di nuovo con t il parametro così introdotto si ha (essendo $\dot{g}_{\mathrm{I}}^{34} = 0$):

$$\bar{\lambda} = \frac{\dot{g}_{\mathrm{I}}^{13} - \lambda \dot{g}_{\mathrm{I}}^{14}}{\dot{g}_{\mathrm{I}}^{23} - \lambda \dot{g}_{\mathrm{I}}^{24}} \tag{3.11}$$

ossia nelle g^{ik}:

$$\bar{\lambda} = \frac{\ddot{g}^{15}\,\dot{g}^{36} - \ddot{g}^{36}\,\dot{g}^{15} - \lambda(\ddot{g}^{15}\,\dot{g}^{46} - \ddot{g}^{46}\,\dot{g}^{15})}{\ddot{g}^{25}\,\dot{g}^{36} - \ddot{g}^{36}\,\dot{g}^{25} - \lambda(\ddot{g}^{25}\,\dot{g}^{46} - \ddot{g}^{46}\,\dot{g}^{25})}\,. \tag{3.12}$$

Il parametro t determinato dalla condizione:

$$\frac{dg^{35}\,dg^{46} - dg^{36}\,dg^{45}}{dt^2} = 1 \tag{3.13}$$

può dirsi *arco proiettivo* della rigata R determinato dalla configurazione (s, Σ_1, σ_1). *La* (3.11) *o* (3.12) *è l'equazione della* ω_g^1 *riferita a questo arco proiettivo.*

Passiamo ora alla proiettività ω_g^2. Al punto $P(\lambda, 1, 0, 0, 0, 0)$ corrisponde lo $S_4 = \sigma_2 P : x^5 = \lambda x^6$. Il punto (3.6) di $g \in \sigma_2 P$ si ha per $\mu = -\lambda$; esso ha coordinate:

$$x^i = g^{i5} - \lambda g^{i6} \quad , \quad i = 1, \cdots, 4; \qquad x^5 = -\lambda \quad , \quad x^6 = -1, \tag{3.14}$$

o anche:

$$x^i = \lambda g^{i6} - g^{i5} \quad , \quad i = 1, \cdots, 4; \qquad x^5 = \lambda \quad , \quad x^6 = 1. \tag{3.15}$$

Lo $S_4 \equiv S$ (2)–osculatore ad R in questo punto ha l'equazione:

$$\begin{vmatrix} x^i & x^5 & x^6 \\ g^{i6} & 1 & 0 \\ g^{i5} & 0 & -1 \\ \dot{g}^{i6} & 0 & 0 \\ \dot{g}^{i5} & 0 & 0 \\ \lambda\ddot{g}^{i6} - \ddot{g}^{i5} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

quindi sega s nel punto $\bar{P}(\bar{\lambda}, 1, 0, 0, 0, 0)$ per cui:

$$\begin{vmatrix} \bar{\lambda} & 1 & 0 & 0 \\ \dot{g}^{16} & \dot{g}^{26} & \dot{g}^{36} & \dot{g}^{46} \\ \dot{g}^{15} & \dot{g}^{25} & \dot{g}^{35} & \dot{g}^{45} \\ \lambda\ddot{g}^{16} - \ddot{g}^{15} & \lambda\ddot{g}^{26} - \ddot{g}^{25} & \lambda\ddot{g}^{36} - \ddot{g}^{35} & \lambda\ddot{g}^{46} - \ddot{g}^{45} \end{vmatrix} = 0,$$

cioè:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda\left(g_{\mathrm{I}}^{34}\ddot{g}^{16} + g_{\mathrm{I}}^{45}\ddot{g}^{36} + g^{13}\ddot{g}^{46}\right) - \left(g_{\mathrm{I}}^{34}\ddot{g}^{15} + g_{\mathrm{I}}^{41}\ddot{g}^{35} + g_{\mathrm{I}}^{13}\ddot{g}^{45}\right)}{\lambda\left(g_{\mathrm{I}}^{34}\ddot{g}^{26} + g_{\mathrm{I}}^{42}\ddot{g}^{36} + g_{\mathrm{I}}^{23}\ddot{g}^{46}\right) - \left(g_{\mathrm{I}}^{34}\ddot{g}^{25} + g_{\mathrm{I}}^{42}\ddot{g}^{35} + g_{\mathrm{I}}^{23}\ddot{g}^{45}\right)}\,. \tag{3.16}$$

Questa è l'equazione della proiettività ω_g^2; *essa dipende dall'*$\mathfrak{E}^2$ *di* R *determinato da* g.

E infine procuriamoci l'equazione della ω_g^3. Il piano tangente ad R nel punto (3.13) incontra Σ_1 $(x^5 = x^6 = 0)$ nel punto di coordinate $x^i = \lambda \dot{g}^{i6} - \dot{g}^{i5}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Affinché questo appartenga al piano $x^3 = \bar{\lambda} x^4$, che per σ_1 corrisponde a $\overline{\mathrm{P}}(\bar{\lambda}, 1, 0, 0, 0, 0)$, dev'essere:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda \dot{g}^{36} - \dot{g}^{35}}{\lambda \dot{g}^{46} - \dot{g}^{45}} . \tag{3.17}$$

Questa è l'equazione di ω_g^3; *essa dipende soltanto dall'*$\mathfrak{E}^1$ *di* R *determinato da* g.

4. – Classi notevoli di rigate in S_5.

Determinate le proiettività $\omega_g^1, \omega_g^2, \omega_g^3$ in relazione ai tre tipi di configurazioni considerate si possono imporre a queste (al variare di g su R) le condizioni già imposte alle proiettività ω_g nel caso di una rigata di S_3 nella Nota I.

Supponiamo per esempio che si imponga che le ω_g^1 siano involuzioni. Dalla (3.11) si ha: $\dot{g}^{14} = \dot{g}^{23}$, e questa condizione confrontata con la (3.1) della Nota I, mostra che la rigata R_1 descritta dalla $g_1(t)$ in Σ_1 appartiene ad un complesso lineare contenente (s, σ_1) in Σ_1. Per costruire poi una rigata R in S_5 per cui le ω_g^1 siano involuzioni basta condurre per ogni $g_1 \in R_1$ un S_3 ad arbitrio (tale che $S_3 \cap \Sigma_1 \equiv g_1$) con le dovute condizioni di differenziabilità: *le rette caratteristiche* di questi ∞^1 S_3 sono le generatrici della più generale rigata R soddisfacente alla condizione voluta.

In modo analogo si esaminano e si costruiscono le rigate R per cui le ω_g^1 soddisfano alle altre condizioni imposte in I alle ω_g.

Passando ad esaminare le ω_g^2 (3.16), volendo per esempio che (al variare di g in R) esse siano involuzioni, dev'essere:

$$g_1^{34} \ddot{g}^{26} + g_1^{41} \ddot{g}^{36} + g_1^{13} \ddot{g}^{46} = g_1^{34} \ddot{g}^{25} + g_1^{42} \ddot{g}^{35} + g_1^{23} \ddot{g}^{45}, \tag{4.1}$$

dove le g_1^{ik} sono date dalle (3.5); cioè le rigate R per cui le ω_g^2 siano involuzioni soddisfano ad una equazione differenziale del 2° ordine e dipendono da sei funzioni arbitrarie di un parametro.

In modo analogo si esaminano le rigate R per cui le ω_g^2 soddisfano alle altre condizioni di cui alla Nota I.

Prendiamo infine in esame le proiettività ω_g^3 rappresentate (al variare di t) dalla (3.17) ed imponiamo che esse siano involuzioni. Perché ciò sia deve essere $\dot{g}^{36} = \dot{g}^{45}$, da cui integrando e passando a coordinate omogenee:

$$g^{36} - g^{45} = c g^{56} \qquad (c \cdot \text{costante}). \tag{4.2}$$

Per caratterizzare le rigate R soddisfacenti alla precedente condizione, consideriamo lo S_3^*: $x_1 = x_2 = 0$. In tale S_3 la data configurazione $(s, \Sigma_1, \sigma_1, \sigma_2)$ *induce* la configurazione (s^*, σ^*) dove $s^* = \Sigma_1 \cap S_3^*$ e σ^* è la proiettività tra la punteggiata su s^* ed il fascio di piani per essa in S_3^* per cui al punto $P^* = s^* \cap \sigma_1$, P corrisponde il piano $\sigma^* P^* = \sigma_2 P \cap S_3^*$.

La (4.2) mostra allora (basta confrontare con la (3.2) della I) che la proiezione R^* fatta dalla retta s ($x^3 = x^4 = x^5 = x^6 = 0$) in S_3^* di una rigata R per cui le ω_g^3 siano involuzioni, appartiene ad un complesso lineare contenente (s^*, σ^*).

Caratterizzata così R^* per ottenere una rigata R di S_5 soddisfacente alla condizione voluta basta condurre per ogni generatrice $g^* \in R^*$ lo $S_3 = s \cup g^*$ e considerare in esso una qualunque retta g: il luogo delle rette g al variare di g^* in R^* è una rigata R del tipo in esame.

In modo del tutto analogo si esaminano le rigate R soddisfacenti alle altre condizioni imposte alle ω_g^3 e di cui alla Nota I: i teoremi trovati in quella caratterizzano quì le rigate R^* proiezioni delle rigate R in esame fatte da s in un qualunque S_3 sghembo con s in relazione alla configurazione (s^*, σ^*) indotta in tale S_3 dalla configurazione $(s, \Sigma_1, \sigma_1, \sigma_2)$.

5. – RIGATE IN S_{2n+1}.

Le considerazioni svolte nei numeri precedenti si estendono ad uno spazio di dimensione dispari qualunque.

Ricordiamo che data in S_{2n+1} una rigata di 1° indice di sviluppabilità $n+1$ (massimo valore possibile), in relazione ad una sua generatrice s sono determinati gli $S_{2h-1} \equiv S(h)$–osculatori ($h = 1, 2, 3 \cdots, n$) lungo s; 2) le proiettività σ_h fra la punteggiata su s e gli $S(h)$–osculatori in essi, tutti contenenti lo $S(h-1)$–osculatore lungo s.

Dati in S_{2n+1} la configurazione (s, Σ_1, σ_1) di cui al n. 2 ed una rigata R descritta da $g(t)$, si facciano le costruzioni seguenti. Sia $P \in s$, Γ_g lo $S_{2n-1} \equiv S(n)$–osculatore lungo g ad R, $g_1(t) \equiv \Gamma_g \cap \Sigma_1$. La retta $g_1(t)$ descrive entro Σ_1 una rigata R_1, questa determina su s, in relazione a g_1 e quindi a g una proiettività ω_g^1 (che dipende all'elemento d'ordine n di R relativo a g).

Il procedimento relativo alla configurazione II del n. 2 si estende nel modo seguente.

Si consideri in S_{2n+1} la configurazione (s, Σ_1, σ_n) ed una rigata R. Il punto $P \in s$ determina lo $S_{2n} \equiv \sigma_n P$, questo sega una g di R in un punto $P_g \equiv g \cap \sigma_n P$. Lo $S_{2n} \equiv S(n)$–osculatore ad R in P_g sega s in un punto $\overline{P}$; la corrispondenza $P \longleftrightarrow \overline{P}$ così determinata su s è una proiettività ω_g^2 dipendente dall'$\mathfrak{E}^n$ di R relativo a g.

Data infine la configurazione $(s, \Sigma_1, \sigma_1, \sigma_n)$ si proceda nel modo seguente. Dato $P \in s$, si determini come nel caso precedente lo $S_{2n} \equiv \sigma_n P$ e $P_g \equiv g \cap \sigma_n P$. Lo $S_{2n-2} \equiv S(n-1)$–osculatore in P_g ad R incontra Σ_1 in un punto $\tilde{P}_g$, il piano $s \cap \tilde{P}_g$ è il corrispondente per σ_1 di un punto $\overline{P}$ di s. La corrispondenza $P \longleftrightarrow \overline{P}$ è una proiettività ω_g^3.

Imponendo alle proiettività così ottenute ed al variare di g le condizioni imposte nel caso di S_5 si ottengono classi notevoli di rigate in S_{2n+1}.

6. – Rigate in S_4.

In S_4 si consideri la seguente configurazione: 1° una retta s; 2° un piano $\pi \supset s$; 3° un punto $S_0 \in \pi$ ma $\not\in s$; 4° una proiettività σ fra la punteggiata su s ed il fascio di $S_3 \supset \pi$. Indicheremo tale configurazione con (s, π, S_0, σ).

Data in S_4 una rigata R descritta da una retta $g(t)$ (al variare di t in un intervallo assegnato), ad un punto $P \in s$ e ad una determinata $g(t)$ si associno gli enti seguenti: lo $S_3 \equiv \sigma P$; il punto $G \equiv \sigma P \cap g$; il piano τ tangente in G ad R; il punto $\mathring{P} \equiv \tau \cap \pi$; il punto $\bar{P} = S_0 \mathring{P} \cap s$. La corrispondenza $P \longleftrightarrow \bar{P}$ su s è una proiettività ω_g dipendente dalla $g(t)$ considerata oltre che da (s, π, S_0, σ) e da R.

La proiettività ω_g al variare di g descrive un sistema ∞^1: imponendo a tale sistema le solite condizioni di cui alla Nota I si ottengono classi notevoli di superficie rigate in S_4.

Allo scopo di esplicitare queste condizioni procuriamoci l'equazione della ω_g.

7. – Equazione della proiettività ω_g.

In S_4 scegliamo il riferimento in modo da avere le seguenti rappresentazioni:

$$s : x^3 = x^4 = x^5 = 0 \quad ; \quad \pi : x^4 = x^5 = 0 \quad ; \quad S_0 : 0, 0, 1, 0, 0 ; \tag{7.1}$$
$$P : \lambda, 1, 0, 0, 0 \quad ; \quad \sigma P : x^4 = \lambda x^5 .$$

Indichiamo al solito con $g^{ik}(t)$ $(i, k = , 2, \cdots, 5)$ le coordinate radiali di $g(t)$ e facciamo l'ipotesi che tutte le $g(t)$ siano sghembe con s; ciò porta $g^{45} \neq 0$.

Con facili calcoli si trova che le coordinate del punto $G \equiv \sigma P \cap g$ sono:

$$g^{14} - \lambda g^{15} \quad , \quad g^{24} - \lambda g^{25} \quad , \quad g^{34} - \lambda g^{35} \quad , \quad - \lambda g^{45} \quad , \quad - g^{45} .$$

Il piano ivi tangente ad R ha equazioni che si ottengono annullando i determinanti del 4° ordine della matrice:

$$\begin{pmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ \dot{g}^{14} - \lambda \dot{g}^{15} & \dot{g}^{24} - \lambda \dot{g}^{25} & \dot{g}^{34} - \lambda \dot{g}^{35} & - \lambda \dot{g}^{45} & - \dot{g}^{45} \\ g^{14} & g^{24} & g^{34} & 0 & - g^{45} \\ g^{15} & g^{25} & g^{35} & g^{45} & 0 \end{pmatrix} .$$

Se com'è possibile, trattandosi di coordinate omogenee, si pone $g^{45} = 1$ e quindi $\dot{g}^{45} = 0$, il punto $\mathring{P}$ intersezione di questo piano con π ha coordinate:

$$x^1 = \lambda \dot{g}^{15} - \dot{g}^{14} \quad , \quad x^2 = \lambda \dot{g}^{25} - \dot{g}^{24} \quad , \quad x^3 = \lambda \dot{g}^{35} - \dot{g}^{34} \quad , \quad x^4 = x^5 = 0 .$$

Il punto $\bar{P} = S_0 \mathring{P} \cap s$ di coordinate $(\bar{\lambda}, 1, 0, 0, 0)$ è determinato da:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda \dot{g}^{15} - \dot{g}^{14}}{\lambda \dot{g}^{25} - \dot{g}^{24}} \tag{7.2}$$

e questa è l'equazione della proiettività ω_g.

8. – CLASSI NOTEVOLI DI RIGATE IN S_4.

Imponiamo che le ∞^1 ω_g (7.2), al variare di g su R, siano involuzioni. Perché ciò sia deve essere: $\dot{g}^{15} = \dot{g}^{24}$ da cui integrando:

$$g^{15} - g^{24} = c g^{45}. \tag{8.1}$$

Se si considera lo $S_3^* : x^3 = 0$, passante per s ma non per S_0 e la configurazione (s, σ^*) in esso indotta dalla (s, π, S_0, σ), essendo σ^* la proiettività tra la punteggiata su s ed il fascio di piani per essa in S_3^* per cui ad un punto $P \in s$ corrisponde il piano $\sigma^* P \equiv \sigma P \cap S_3^*$, la (8.1) confrontata ancora con la (3.2) della I, mostra che la rigata R^* proiezione da S_0 in S_3^* di una rigata R per cui le ω_g siano involuzioni appartiene ad un complesso lineare contenente (s, σ^*).

Per costruire poi una rigata R di S_4 per cui le ω_g siano involuzioni basta condurre per ogni $g^* \in R^*$ il piano $S_0 \cap g^*$ e considerare in esso una generica retta g. Il luogo delle g così ottenute è una rigata R del tipo voluto.

In modo del tutto analogo si esaminano le rigate R ottenute imponendo alle ω_g le altre condizioni di cui in I.

9. – RIGATE IN S_{2n}.

Le considerazioni svolte nel n. precedente si estendono al caso di uno spazio S_{2n}, di dimensione pari qualunque, nel modo seguente.

In un S_{2n} si consideri la seguente configurazione: 1° una retta s; 2° un $\bar{S}_{2n-2} \supset s$; 3° un $\bar{S}_{2n-4} \in \bar{S}_{2n-2}$ ma $\not\supset s$; 4° una proiettività σ fra la punteggiata su s ed il fascio di $S_{2n-1} \supset \bar{S}_{2n-2}$.

Data una rigata R descritta da $g(t)$, ad un punto $P \in s$ e ad una determinata $g(t)$ si associino gli enti seguenti: lo $S_{2n-1} \equiv \sigma P$; il punto $G \equiv \sigma P \cap g$; il piano tangente τ in G ad R; il punto $\tilde{P} \equiv \tau \cap \bar{S}_{2n-2}$; il punto $\bar{P} \equiv \bar{S}_{2n-4} \tilde{P} \cap s$. La corrispondenza $P \longleftrightarrow \bar{P}$ su s è una proiettività ω_g dipendente da $g(t) \in R$ e dalla configurazione assegnata.

Imponendo alle ∞^1 ω_g ottenute al variare di g su R le solite condizioni di cui alla Nota I, si ottengono classi notevoli di rigate in S_{2n}.