Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Ossicini

Nuova formula asintotica per i polinomi di Jacobi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.5, p. 624–629.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_5_624_0¿

Analisi matematica. — *Nuova formula asintotica per i polinomi di Jacobi* (*). Nota di ALESSANDRO OSSICINI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. È nota la seguente formula asintotica di tipo Hilb, per i polinomi di Jacobi (1)

$$(1.1)\qquad \left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \frac{N^{-\alpha}\,\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\left(\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)^{1/2} J_\alpha(N\theta) + \delta_{n,\alpha}(\theta)$$

ove $\alpha > -1$, β arbitrario reale, $N = n + \dfrac{\alpha+\beta+1}{2}$ e

$$(1.2)\qquad \delta_{n,\alpha}(\theta) = \begin{cases} \theta^{\alpha+2}\, O(n^{\alpha}) & \text{se} \quad 0 < \theta \le \dfrac{1}{n} \\ \theta^{\frac{1}{2}}\, O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) & \text{se} \quad \dfrac{1}{n} \le \theta \le \pi - \varepsilon \end{cases}$$

con ε numero positivo.

Vogliamo dimostrare con un procedimento elementare la nuova formula asintotica:

$$(1.3)\qquad \theta^{-\frac{1}{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \frac{2^{-\frac{1}{2}}\,N^{-\alpha}\,\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\cdot$$

$$\cdot\left[J_\alpha(N\theta) - \frac{\theta}{24}(\alpha^2 + 3\beta^2 - 1)\,J'_\alpha(N\theta)\right] + \varepsilon_{n,\alpha}(\theta)$$

ove $\alpha > -1$, β arbitrario reale, $N = n + \dfrac{\alpha+\beta+1}{2}$ e

$$(1.4)\qquad \varepsilon_{n,\alpha}(\theta) = \begin{cases} \theta^{\alpha+4}\, O(n^{\alpha}) & \text{se} \quad 0 < \theta \le \dfrac{1}{n} \\ \theta^{\frac{5}{2}}\, O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) & \text{se} \quad \dfrac{1}{n} \le \theta \le \pi - \varepsilon \end{cases}$$

con ε numero positivo.

Per la dimostrazione della (1.3) utilizzeremo l'equazione di tipo Volterra, alla quale soddisfa la funzione (2) $\left(\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$,

(*) Lavoro del gruppo di ricerca n. 22 del Comitato per la Matematica del C.N.R., eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1962.

(1) H. RAU, *Über eine asymptotische Darstellung der Jacobischen Polynome durch Besselsche Funktionen*, « 3 Math. Zeitsch. », vol. 40, pp. 683–692 (1936).

(2) G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, « Amer. Math. Col. Publ. », XXIII, New York, p. 209 (1939).

$$(1.5)\quad \theta^{-\frac{1}{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\frac{2^{-\frac{1}{2}}N^{-\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}J_\alpha(N\theta)$$

$$+\int_0^\theta F_\alpha(\theta,t)\,t^{1/2}f(t)\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{t}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos t)\,dt$$

ove

$$f(t)=\frac{\beta^2-\frac{1}{4}}{4\cos^2\frac{t}{2}}+\left(\frac{1}{4}-\alpha^2\right)\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{4\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}\right)$$

$$(1.6)\quad F_\alpha(\theta,t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\operatorname{sen}\alpha\pi}\left[J_\alpha(N\theta)J_{-\alpha}(Nt)-J_{-\alpha}(N\theta)J_\alpha(Nt)\right] & \alpha \text{ non intero}\\ -\dfrac{\pi}{2}\left[J_\alpha(N\theta)Y_\alpha(Nt)-Y_\alpha(N\theta)J_\alpha(Nt)\right] & \alpha\geq 0 \text{ intero}\end{cases}$$

essendo $J_\alpha(z)$, $J_{-\alpha}(z)$ funzioni di Bessel di prima specie e $Y_\alpha(z)$ funzioni di Bessel di seconda specie.

Terremo inoltre conto dell'ordine di grandezza delle $J_\alpha(z)$, $Y_\alpha(z)$ per $z\to+0$, e $z\to+\infty$ (3).

Per $z\to+0$ si ha

$$(1.7)\qquad J_\alpha(z)\sim z^\alpha \qquad \alpha\neq-1,-2,-3,\cdots$$

$$(1.8)\qquad Y_\alpha(z)\sim z^{-\alpha} \qquad \alpha=1,2,3,\cdots$$

$$(1.9)\qquad Y_0(z)\sim\log\frac{1}{z}$$

mentre per $z\to+\infty$

$$(1.10)\qquad J_\alpha(z)=O\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)\quad,\quad Y_\alpha(z)=O\left(z^{-\frac{1}{2}}\right).$$

2. Se osserviamo che per $0\leq t<\pi-\varepsilon$, $(0<\varepsilon<\pi)$ la funzione $f(t)$ è regolare e si ha

$$f(t)=\frac{1}{12}(3\beta^2+\alpha^2-1)+H(t)\cdot t^2\quad,\quad H(t)=O(1)$$

e se sostituiamo la (1.1) nell'integrale a seconda membro della (1,5) troviamo che

$$(2.1)\quad \theta^{-\frac{1}{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=2^{-\frac{1}{2}}N^{-\alpha}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}J_\alpha(N\theta)$$

$$+\Lambda_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)+R_{n,\alpha}^{(1)}(\theta)+R_{n,\alpha}^{(2)}(\theta)$$

con

$$\Lambda_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)=\frac{2^{-\frac{1}{2}}N^{-\alpha}\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\,\frac{3\beta^2+\alpha^2-1}{12}\int_0^\theta tF_\alpha(t,\theta)\,J_\alpha(N\theta)\,dt,$$

(3) Cfr. G. SZEGÖ, op. cit., in (2) p. 16.

$$R^{(1)}_{n,\alpha}(\theta) = \int_0^\theta F_\alpha(t\,,\theta)\, 2^{-\frac{1}{2}}\, t^{1/2} \operatorname{sen}^{1/2} t f(t)\, \delta_{n,\alpha}(t)\, dt\,,$$

$$R^{(2)}_{n,\alpha}(\theta) = \frac{2^{-\frac{1}{2}}\, N^{-\alpha}\, \Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \int_0^\theta H(t)\, t^3\, F_\alpha(t\,,\theta)\, J_\alpha(Nt)\, dt\,.$$

Determiniamo ora l'integrale $\Lambda_n^{(\alpha,\beta)}(\theta)$.

Se α è reale non intero abbiamo

$$\Lambda_{(n)}^{(\alpha,\beta)}(\theta) = \frac{2^{-\frac{1}{2}}\, N^{-\alpha}\, \Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\, \frac{3\beta^2+\alpha^2-1}{12}\, \frac{\pi}{2\operatorname{sen}\alpha\pi}\, \cdot \tag{2.2}$$

$$\cdot \left[J_\alpha(N\theta) \int_0^\theta t J_\alpha(Nt)\, J_{-\alpha}(Nt)\, dt - J_{-\alpha}(N\theta) \int_0^\theta t J_\alpha^2(Nt)\, dt \right] \cdot$$

Il calcolo di $\Lambda_n^{(\alpha,\beta)}$ è quindi legato ai due integrali

$$\int_0^\theta t J_\alpha(Nt)\, J_{-\alpha}(Nt)\, dt \quad , \quad \int_0^\theta t J_\alpha^2(Nt)\, dt\,,$$

ma [4]

$$\int^z z J_\alpha(z)\, J_{-\alpha}(z)\, dz = \frac{1}{4} \left\{ 2\, J_\alpha(z)\, J_{-\alpha}(z) + J_{\alpha-1}(z)\, J_{-\alpha-1}(z) + J_{\alpha+1}(z)\, J_{-\alpha+1}(z) \right\}$$

$$\int^z z J_\alpha^2(z)\, dz = \frac{1}{2} \left\{ J_\alpha^2(z) - J_{\alpha-1}(z)\, J_{\alpha+1}(z) \right\};$$

si ottiene quindi dalla (2.2)

$$\Lambda_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) = \frac{2^{-\frac{1}{2}}\, N^{-\alpha}\, \Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\, \frac{3\beta^2+\alpha^2-1}{12}\, \frac{\pi}{2\operatorname{sen}\alpha\pi}\, \frac{1}{4}\, \cdot \tag{2.3}$$

$$\cdot\, \theta^2 \{ J_{\alpha+1}(N\theta)\, [J_\alpha(N\theta)\, J_{-\alpha+1}(N\theta) + J_{-\alpha}(N\theta)\, J_{\alpha-1}(N\theta)]$$

$$+ J_{\alpha-1}(N\theta)\, [J_{-\alpha}(N\theta)\, J_{\alpha+1}(N\theta) + J_{-\alpha+1}(N\theta)\, J_\alpha(N\theta)] \}$$

e per la formula di Sommel [5]

$$J_\alpha(z)\, J_{1-\alpha}(z) + J_{-\alpha}(z)\, J_{-\alpha-1}(z) = \frac{2\operatorname{sen}\alpha\pi}{\pi z}$$

la (2.3) diviene

$$\Lambda_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) = \frac{2^{-\frac{1}{2}}\, N^{-\alpha}\, \Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\, \frac{3\beta^2+\alpha^2-1}{12}\, \frac{\theta}{4N}\, [J_{\alpha+1}(N\theta) - J_{\alpha-1}(N\theta)]$$

(4) G. N. WATSON, « Bessel Functions, New-York, p. 135 (1948).
(5) Cfr. G. N. WATSON, op. cit., (4) p. 46.

ed infine per la formula ricorrente [6]

$$J_{\alpha+1}(z) - J_{\alpha-1}(z) = -2\, J'_{\alpha}(z)$$

perveniamo alla

$$\Lambda_n^{(\alpha,\beta)}(\theta) = -\frac{2^{-\frac{1}{2}} N^{-\alpha}\, \Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\, \frac{3\beta^2+\alpha^2-1}{24}\, \frac{\theta}{N}\, J'_{\alpha}(N\theta)\,. \tag{2.4}$$

Alla stessa espressione si perviene nel caso di α intero, tenuto conto delle formule [7]

$$\int^{z} z J_{\alpha}(z)\, Y_{\alpha}(z)\, dz = \frac{1}{2} z^2 \left[2\, J_{\alpha}(z)\, Y_{\alpha}(z) - J_{\alpha-1}(z)\, Y_{\alpha+1}(z) + - J_{\alpha+1}(z)\, Y_{\alpha-1}(z)\right]$$

$$J_{\alpha}(z)\, Y_{\alpha+1}(z) - J_{\alpha+1}(z)\, Y_{\alpha}(z) = \frac{-2}{\pi z}$$

e delle (1.7) (1.8) (1.9)

3. VALUTAZIONE DEL RESTO $R^{(1)}_{n,\alpha}$. – A causa della (1.2) dovremo distinguere due casi

$$0 < \theta \leq \frac{1}{n} \quad , \quad \frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \varepsilon\,.$$

Nel caso $0 < \theta < \frac{1}{n}$, $\alpha \neq 0$ intero o no si ha:

$$O(n^{\alpha}) \int_0^{\theta} (\theta^{\alpha} t^{-\alpha} + \theta^{-\alpha} t^{\alpha})\, t^{\alpha+3}\, dt = \theta^{\alpha+4}\, O(n^{\alpha})\,. \tag{3.1}$$

Nel caso $\alpha = 0$ [8] si ottiene la medesima limitazione cioè $O(1)\,\theta^4$. Consideriamo ora il caso $\frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$.

Il contributo dell'intervallo $0 < t \leq \frac{1}{n}$ è

$$O(1) \int_0^{1/n} (n\theta)^{-\frac{1}{2}} \left(|J_{-\alpha}(Nt)| + |J_{\alpha}(Nt)|\right) t^{\alpha+3}\, n^{\alpha}\, dt = \tag{3.2}$$

$$O\left(n^{-\frac{9}{2}} \theta^{-\frac{1}{2}}\right) = (n\theta)^{-3}\, O\left(\theta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}}\right) = \theta^{\frac{5}{2}}\, O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right).$$

(stessa limitazione nel caso di α intero).

(6) Cfr. G. N. WATSON, op. cit. (4) p. 45.

(7) Cfr. G. N. WATSON, op. cit. (4) p. 134 e p. 71.

(8) Per $\alpha = 0$ vedi L. GATTESCHI, *Una nuova rappresentazione asintotica dei Polinomi di Legendre mediante funzioni di Bessel*, « Boll. Unione Mat. Ital. », serie III, anno XI, n. 2, pp. 203–209.

Per quanto riguarda poi l'intervallo $\frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$ per $\frac{1}{n} \leq t$ se teniamo conto dell'espressione di $\delta_{n,\alpha}(\theta)$ e delle (1.10) otteniamo

$$(3.3) \qquad O(1) \int_{1/n}^{\theta} (n\theta)^{-\frac{1}{2}} (nt)^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{3}{2}} dt = O\left(\theta^{\frac{3}{2}} n^{-\frac{5}{2}}\right) = O\left(\theta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}}\right)$$

si ha quindi per $R^{(1)}_{n,\alpha}(\theta)$ l'espressione

$$(3.4) \qquad R^{(1)}_{n,\alpha}(\theta) = \begin{cases} \theta^{\alpha+4} O(n^{\alpha}) & 0 < \theta \leq \frac{1}{n} \\ \theta^{\frac{5}{2}} O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) & \frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \varepsilon . \end{cases}$$

4. VALUTAZIONE DEL RESTO $R^{(2)}_{n,\alpha}$. – Anche in questo caso dovremo distinguere i due casi $0 < \theta \leq \frac{1}{n}$, $\frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$.

Terremo inoltre conto della [9]

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} = n^{\alpha} [1 + o(n^{-1})] .$$

Se ora $\theta < \frac{1}{n}$ per la (1.2) e per le (1.7) si ha

$$(4.1) \qquad O(n^{\alpha}) \int_{0}^{\theta} (t^3 \theta^{\alpha} + \theta^{-\alpha} t^{2\alpha+3}) dt = \theta^{\alpha+4} O(n^{\alpha})$$

e analogamente per $\alpha = 0$ si ha $O(1)\theta^4$.

Passiamo poi al caso $\frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$. Per α non intero il contributo dell'intervallo $0 < t \leq \frac{1}{n}$ è

$$(4.2) \qquad O(1) \int_{0}^{1/n} (n\theta)^{-\frac{1}{2}} [\,|J_{-\alpha}(Nt)| + |J_{\alpha}(Nt)|\,]\, |J_{\alpha}(Nt)|\, t^3 dt =$$

$$O\left(n^{-\frac{9}{2}} \theta^{-\frac{1}{2}}\right) = O\left(\theta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}}\right):$$

stessa limitazione per α intero.

Infine sempre per $\frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$ a causa delle (1.7) il contributo dell'intervallo $\frac{1}{n} \leq t$ è:

$$(4.3) \qquad O(1) \int_{1/n}^{\theta} (n\theta)^{-\frac{1}{2}} (nt)^{-\frac{1}{2}} \cdot (nt)^{-\frac{1}{2}} t^3 dt = O\left(\theta^{\frac{5}{2}} n^{-\frac{3}{2}}\right).$$

(9) F. TRICOMI, *Funzioni ipergeometriche confluenti*, Roma, p. 116 (1954).

Si ha quindi per $R^{(2)}_{n,\alpha}(\theta)$ l'espressione

$$(4.4)\qquad R^{(2)}_{n,\alpha}(\theta) = \begin{cases} \theta^{\alpha+4}\, O(n^{\alpha}) & 0 < \theta \leq \frac{1}{n} \\ \theta^{\frac{5}{2}}\, O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) & \frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \varepsilon\,. \end{cases}$$

In base quindi alle (2.1), (2.4), (3.4), (4.4), si ha

$$(4.5)\qquad \theta^{-\frac{1}{2}}\left(\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}} P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \frac{2^{-\frac{1}{2}} N^{-\alpha}\,\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\cdot$$
$$\cdot\left[J_\alpha(N\theta) - \frac{\theta}{24}(\alpha^2 + 3\beta^2 - 1)\, J'_\alpha(N\theta)\right] + \varepsilon_{n,\alpha}(\theta)$$

$\alpha > -1$, β reale arbitrario, $N = n + \dfrac{\alpha+\beta+1}{2}$ e

$$(4.6)\qquad \varepsilon_{n,\alpha}(\theta) = \begin{cases} \theta^{\alpha+4}\, O(n^{\alpha}) & 0 < \theta \leq \frac{1}{n} \\ \theta^{\frac{5}{2}}\, O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right) & \frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi - \varepsilon \end{cases}$$

con ε numero positivo dato.

Ovviamente per il resto $\varepsilon_{n,\alpha}(\theta)$ si ha sempre che esso è $\theta^{\frac{5}{2}}\, O\left(n^{-\frac{3}{2}}\right)$.
Se poi teniamo conto della [10]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x)$$

si può scrivere una formula simile alla (4.5) per gli intervalli $\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \frac{1}{n}$; $\pi - \frac{1}{n} \leq \theta \leq \pi$ (ε numero positivo) se si pone $\beta > -1$.

(10) Cfr. G. SZEGÖ, op. cit. in (2) p. 58.