Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, Elena Croitoru

Equazioni di programmazione dinamica concernenti i problemi al contorno a derivate totali nel senso di Picone

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.5, p. 619–623.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_5_619_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Equazioni di programmazione dinamica concernenti i problemi al contorno a derivate totali nel senso di Picone.* Nota di DEMETRIO MANGERON ed ELENA CROITORU, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Ricerche fondamentali del tutto recenti concernenti la programmazione dinamica e la teoria dei processi ottimali dovute specialmente a R. Bellmann [1], [2], L. S. Pontriaghin [3] ed altri ancora, combinate col nuovo contributo essenziale dovuto all'illustre accademico linceo M. Picone [4], [5], relativo all'elaborazione di criteri sufficienti per il minimo assoluto di certi integrali pluridimensionali del calcolo delle variazioni (1), costituiscono un potentissimo insieme di mezzi matematici atti a strappare altri segreti, tuttora gelosamente nascosti, della natura.

Prendendo le mosse dal più semplice problema al contorno relativo all'operatore differenziale non ellittico

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - \lambda A(x, y) = 0 \quad , \quad u|_{FR} = 0 \quad , \quad R\begin{pmatrix} a \leq x \leq c \\ b \leq y \leq d \end{pmatrix}, \tag{1}$$

che costituisce un caso particolare di tutt'una classe di equazioni, studiate da vari punti di vista da uno degli Autori [6], [7] e sfruttate poscia da altri [8], [9], [10], [11], di forma

$$\begin{gathered}[A(x)u' + \lambda B(x)u]' \\ + \lambda[B(x)u' + C(x)u] = 0 \quad , \quad u|_{FR} = 0 \quad , \quad R\cdot(x_i^* \leq x_i \leq x_i^{**}), \\ (i = 1, 2, \cdots, 2n)\end{gathered} \tag{2}$$

ove

$$Du \equiv u' = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_{2n}} \tag{3}$$

è la derivata totale nel senso di M. Picone [12], si dànno le equazioni di programmazione dinamica corrispondenti a (1), mentre si lascia la totalità degli sviluppi algoritmici concernenti anche i casi più generali ed alcune applicazioni per oggetto di un'altra Nota più ampia che sarà pubblicata nel « Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iași » (Jassy).

(*) Nella seduta del 12 maggio 1962.

(1) Ci è grato di sottolineare qui un cospicuo numero di problemi chiaramente formulati dal prof. Picone nel § 6 della sua recentissima Memoria [13] e che costituisce di per sé un vero e proprio programma di studi ulteriori relativi all'approfondimento del calcolo delle variazioni, utilizzandovi ciò che egli ha chiamato le *funzioni d'invarianza*.

2. Il punto di partenza dei risultati che seguono sta nel fatto che il problema dei valori al contorno (1) è equivalente al problema di determinazione dei minimi del funzionale [6]

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy\,, \tag{4}$$

a patto che siano soddisfatte le condizioni

$$u(0\,,y) = u(x\,,0) = u(1\,,y) = u(x\,,1) = 0\,, \tag{5}$$

$$\int_0^1\int_0^1 A(x\,,y)\,u^2\,dx\,dy = 1\,, \tag{6}$$

oppure al problema di determinazione dei massimi relativi del funzionale

$$\int_0^1\int_0^1 A(x\,,y)\,u^2\,dx\,dy\,, \tag{7}$$

a patto che siano soddisfatte le condizioni (5) e

$$\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy = 1\,. \tag{8}$$

Una prima via che ci conduce ad una forma iniziale di equazioni funzionali del quadro di programmazione dinamica consta nella considerazione del problema di minimo per il funzionale

$$J(u) = \int_{a_1}^1\int_{a_2}^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)^2 dx\,dy\,, \tag{9}$$

nell'insieme di tutte le funzioni u che soddisfano le condizioni

$$u(a_1\,,y) = u(x\,,a_2) = k^{(2)} \quad , \quad u(x\,,1) = u(1\,,y) = 0\,, \tag{10}$$

$$\int_{a_1}^1\int_{a_2}^1 A(x\,,y)\,u^2\,dx\,dy = 1\,. \tag{11}$$

Qui i nuovi parametri di stato a_1 , a_2 , k del sistema soddisfano le condizioni $0 \leq a_1 < 1$, $0 \leq a_2 < 1$ e si suppone inoltre che la funzione $A(x\,,y)$ assume i valori in un certo dominio $D\,(0 < b_1 \leq A(x\,,y) \leq b_2)$, allorché $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ ed è continua nel dominio $P = [0\,,1] \times [0\,,1]$.

(2) Oppure, più generalmente, come sarà mostrato in un'altra Nota,

$$u(a_1\,,y) = k_1(y) \quad , \quad u(x\,,a_2) = k_2(x) \quad , \quad k_1(a_2) = k_2(a_1) = k. \tag{10*}$$

I passi consecutivi che ci conducono alla formulazione del problema di programmazione dinamica, cui si può applicare poscia – con la cautela spettante alle difficoltà inerenti ai problemi pluridimensionali – la serie di procedimenti ingegnosamente escogitati da R. Bellman [1], [2] per casi dei problemi al contorno ad una sola dimensione, sono i seguenti.

Sia

$$f(a_1, a_2, k)^{(3)} = \min \int_{a_1}^{1}\int_{a_2}^{1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 dx\, dy, \tag{12}$$

soggetta alle condizioni restrittive (10) e (11).

Si ha, se si fa astrazione dei termini di ordine superiore d'infinito, notati genericamente col $o(s_1, s_2)$, lungo una superficie estremale

$$\int_{a_1+s_1}^{1}\int_{a_2+s_2}^{1} A(x, y)\, u^2\, dx\, dy = \left[\int_{a_1}^{1}\int_{a_2}^{1} - \int_{a_1}^{a_1+s_1}\int_{a_2}^{a_2+s_2} - \int_{a_1}^{a_1+s_1}\int_{a_2+s_2}^{1} - \int_{a_1+s_1}^{1}\int_{a_2}^{a_2+s_2}\right]. \tag{13}$$

$$A(x, y)\, u^2\, dx\, dy = 1 - s_1 k^2 \int_{a_2+s_2}^{1} A(a_1, y)\, dy - s_2 k^2 \int_{a_1+s_1}^{1} A(x, a_2)\, dx;$$

$$(a_1 + s_1 \leq x \leq 1 \;;\; a_2 + s_2 \leq y \leq 1),$$

$$u(a_1 + s_1, a_2 + s_2) = k + s_1 v_1 + s_2 v_2; \tag{14}$$

$$v_1 = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a_1}, \quad v_2 = \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=a_2};$$

$$f(a_1, a_2, k) = \int_{a_1+s_1}^{1}\int_{a_2+s_2}^{1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 dx\, dy + s_1 \int_{a_2+s_2}^{1} v_{1y}^2\, dy + s_2 \int_{a_1+s_1}^{1} v_{2x}^2\, dx, \tag{15}$$

$$v_{1y} = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad v_{2x} = \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Facciamo ora il cambiamento di funzione

$$u(x, y) = \left[1 - s_1 \int_{s_2+a_2}^{1} A(a_1, y)\, dy \frac{k^2}{2} - s_2 \int_{s_1+a_1}^{1} A(x, a_2)\, dx \frac{k^2}{2}\right] w(x, y), \tag{16}$$

atto a mantenere la condizione (11). Abbiamo successivamente:

$$w(a_1 + s_1, a_2 + s_2) = k + s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_1 \int_{s_2+a_2}^{1} A(a_1, y)\, dy \frac{k^3}{2} \tag{17}$$

$$+ s_2 \int_{s_1+a_1}^{1} A(x, a_2)\, dx \frac{k^3}{2};$$

(3) Il *funzionale* più generale sarà dato da $f(a_1, a_2, k_1(y), k_2(x))$.

(18)
$$f(a_1, a_2, k) = \int_{a_1+s_1}^{1} \int_{a_2+s_2}^{1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 dx\, dy \cdot$$
$$\cdot \left(1 - s_1 \int_{s_2+a_2}^{1} A(a_1, y)\, dy \frac{k^2}{2} - s_2 \int_{s_1+a_1}^{1} A(x, a_2)\, dx \frac{k^2}{2}\right) + s_1 \int_{a_2+s_2}^{1} v_{1y}^2\, dy + s_2 \int_{a_1+s_1}^{1} v_{2x}^2\, dx,$$

sempre astrazion fatta dai termini d'ordine $o(s_1, s_2)$.

Combinando i risultati di cui sopra, si ottiene l'equazione funzionale approssimante

(19)
$$f(a_1, a_2, k) = \min_{v_1, v_2} \left[s_1 \int_{a_2+s_2}^{1} v_{1y}^2\, dy + s_2 \int_{a_1+s_1}^{1} v_{2x}^2\, dx \right.$$
$$+ \left(1 - s_1 \int_{s_2+a_2}^{1} A(a_1, y)\, dy \frac{k^2}{2} - s_2 \int_{s_1+a_1}^{1} A(x, a_2)\, dx \frac{k^2}{2}\right)$$
$$\times f\left(a_1 + s_1, a_2 + s_2, k + s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_1 \int_{s_2+a_2}^{1} A(a_1, y)\, dy \frac{k^3}{3}\right.$$
$$\left.\left. + s_2 \int_{s_1+a_1}^{1} A(x, a_2)\, dx \frac{k^3}{2}\right)\right] + o(s_1, s_2).$$

I risultati acquisiti, non privi sin'ora di alcuni aspetti formali, conducono (4) al sistema di equazioni funzionali (integro–differenziali a derivate parziali) le quali traducono poi, nel linguaggio e tramite procedimenti di programmazione dinamica, un largo cerchio di problemi al contorno per le equazioni alle derivate totali nel senso di Picone che costituiscono tutt'oggi il dominio di ricerca di vari scienziati [14], [15], [16] e di cui un insieme di applicazioni notevoli era stato già additato nella Memoria [12].

Bibliografia.

[1] R. Bellman, *Adaptive Control Processes. A Guided Tour.* Princeton University Press, 255 pp. (1961).

[2] R. Bellman, *Dinamičeskoe programmirovanie* (*Programmazione dinamica*), Mosca, Izd. I. L., 400 pp. (1960).

[3] L. S. Pontriaghin, V. G. Boltianski, R. V. Gamkrelidze, E. F. Misčenko, *Matematičeskaia teoria optimal'nyh protzessov* (*Teoria matematica dei processi ottimali*), Mosca, Fizmatghiz, 391 pp. (1961).

[4] M. Picone, *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale bidimensionale del second'ordine nello scalare minimante e conseguenti limitazioni per gli autovalori di un pa-*

(4) Facendo tendere s_1 e s_2 allo zero indipendentemente l'uno dall'altro e passando poi al limite.

rametro da cui dipende un'equazione euleriana a derivate parziali del quart'ordine, «Atti Acc. Sci. Torino», *95*, pp. 1–11 (1960–61).

[5] M. PICONE, *Nuovi criteri sufficienti in un classico problema di calcolo delle variazioni*, «Annali Mat. pura ed applicata», ser. IV, t. LIII, pp. 119–137 (1961).

[6] D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppie*, «Rend. Accad. Sci. Fis. Mat., Napoli», ser. 4^a, II, pp. 1–11 (1932).

[7] D. MANGERON, *Sur certains problèmes à la frontière pour les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, «Comptes rendus Acad. Sci., Paris», *207*, pp. 94–96; 544–546; 1022–1024 (1937).

[8] A. ROSENBLATT, *Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples*, «Comptes rendus Acad. Sci., Paris», *297*, pp. 1278–1280 (1933).

[9] M. SALVADORI, *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*, «Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa», ser. 2^a, V, pp. 51–72 (1936).

[10] F. MANARESI, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*, «Rend. Sem. Mat. Univ. Padova», XXIII, pp. 163–213 (1954).

[11] E. DE GIORGI, *Un teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo ad equazioni differenziali a derivate parziali di tipo parabolico. Scritti Matematici offerti a Mauro Picone*, Bologna. Azzoguidi, pp. 781–787 (1955).

[12] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, «Ann. Sci. de l'Univ., Jassy», I. Section (Math., Phys., Chimie), XXVI, 1, pp. 183–232 (1940).

[13] M. PICONE, *Criteri sufficienti per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale del primo ordine nel vettore minimante*, «Atti Accad. Naz. dei Lincei, Memorie», Cl. Sci. fis., mat., nat. Anno CCCLIX, ser. VIII, vol. VI, fasc. II, pp. 281–339 (1962).

[14] JU. M. BEREZANSKI, *O kraevyh zadačah dlea obsčih differentzial'nyh operatorov v častnyh proizvodnyh* (*Sui problemi al contorno per gli operatori generali a derivate parziali*), «Doklady Akad. Nauk SSSR», *122*, 6, pp. 959–962 (1958).

[15] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone*. (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*), «Rend. Accad. Naz. dei Lincei», Cl. Sci. fis., mat. e nat., ser. VIII, vol. XXXI, fasc. 1–2, pp. 27–32 (1961).

[16] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Il metodo polinomiale nei problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone*, «Rend. Accad. Naz. dei Lincei», ser. VIII, vol. XXXII, fasc. 3, pp. 306–312 (1962).