Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, Elena Croitoru

Sulla teorìa generale delle accelerazioni ridotte d'ordine qualunque

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.4, p. 505–508.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_4_505_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Meccanica razionale. — *Sulla teoria generale delle accelerazioni ridotte d'ordine qualunque.* Nota di DEMETRIO MANGERON ed ELENA CROITORU, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. Nello studio dei meccanismi piani si è dimostrata assai feconda la nozione di accelerazione ridotta d'ordine qualunque, introdotta da uno degli Autori [1], [2] tramite le relazioni per ricorrenza

$$\vec{a}^{(m)}_{\mathrm{M}r} = \frac{\vec{a}^{(m)}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{A}_m} \quad , \quad \vec{a}^{(1)}_{\mathrm{M}r} = \frac{\vec{a}^{(1)}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{A}_1} \equiv \frac{\vec{a}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{A}_1}, \qquad (m = 1, 2, \cdots) \tag{1}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1^{(m+1)} \\ x_2^{(m+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{10}^{(m+1)} \\ x_{20}^{(m+1)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\mathrm{A}_m & -\mathrm{B}_m \\ \mathrm{B}_m & -\mathrm{A}_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathrm{A}_{m+1} = \frac{d\mathrm{A}_m}{dt} + \frac{d\theta}{dt}\mathrm{B}_m \quad , \quad \mathrm{B}_{m+1} = \frac{d\mathrm{B}_m}{dt} - \frac{d\theta}{dt}\mathrm{A}_m , \\ & \mathrm{A}_1 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega^2 \quad , \quad \mathrm{B}_1 = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \omega^{(2)} = \varepsilon, \end{aligned} \right. \tag{3}$$

ove $\theta = \theta(t)$ è il solito angolo di rotazione di un solido rigido trovantesi in un moto parallello ad un piano fisso.

Tra un cospicuo numero di teoremi che interessano (1)–(2) mentoviamo qui il seguente

TEOREMA I. – *Il luogo geometrico delle estremità delle accelerazioni ridotte d'ordine m dei punti di una retta* ($\mathfrak{D}$) *rigidamente collegata ad un solido rigido trovantesi in moto parallello ad un piano fisso è un'altra retta* ($\mathfrak{D}_m$) *perpendicolare alla prima.*

L'analogo spaziale del teorema I testè enunciato concerne le accelerazioni ridotte d'ordine *m di prima specie,* definite tramite le relazioni per ricorrenza [3], [4]

$$\vec{a}^{(m)}_{\mathrm{M}r} = \frac{\vec{a}^{(m)}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{A}_m - \mathrm{A}_m(\vec{u})} \quad , \quad \vec{a}^{(1)}_{\mathrm{M}r} = \frac{\vec{a}^{(1)}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1(\vec{u})} \equiv \frac{\vec{a}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_1(\vec{u})}, \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathrm{A}_{m+1} = \frac{d\mathrm{A}_m}{dt} + \vec{\omega}\cdot\vec{\mathrm{B}}_m \quad , \quad \vec{\mathrm{B}}_{m+1} = \frac{d\vec{\mathrm{B}}_m}{dt} - \vec{\omega}\,\mathrm{A}_m , \\ & \mathrm{A}_1 = \vec{\omega}\cdot\vec{\omega} \quad , \quad \vec{\mathrm{B}}_1 = \vec{\omega}^{(2)} = \vec{\varepsilon} , \qquad (m = 1, 2, \cdots) \end{aligned} \right. \tag{5}$$

(*) Nella seduta del 14 aprile 1962.

$$
(6)\quad \begin{cases}
A_1(\vec{u}) = (\vec{\omega}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}\cdot\vec{u}) & \text{per } A_1 = (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}),\\
A_2(\vec{u}) = 3\,(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}\cdot\vec{u}) & \text{per } A_2 = 3\,(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{\omega}),\\
A_3(\vec{u}) = 4\,(\vec{\omega}^{(3)}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}\cdot\vec{u}) + & \text{per } A_3 = 4\,(\vec{\omega}^{(3)}\cdot\vec{\omega}) +\\
+\,3\,(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u}) - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})(\vec{\omega}\cdot\vec{u})(\vec{\omega}\cdot\vec{u}) & +\,3\,(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{\omega}^{(2)}) - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}),\\
 & \text{ecc.,}
\end{cases}
$$

ove $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ è la velocità angolare istantanea di una retta $(\mathfrak{D})$ di versore $\vec{u}$ in atto di moto spaziale composto [5].

2. In corrispondenza alla definizione delle accelerazioni spaziali ridotte *di seconda specie* tradotta nelle relazioni per ricorrenza

$$
(7')\quad \vec{a}^{(m)'}_{Mr} = \lambda'_m\,\vec{a}^{(m)}_{M} \quad , \quad \lambda'_m = \frac{1}{2}\,\frac{A_m + A_m(\vec{u}_3) + \sqrt{(A_m - A_m(\vec{u}_3))^2 - B_m^2(\vec{u}_3)}}{A_m\cdot A_m(\vec{u}_3) + B_m^2(\vec{u}_3)}\,,
$$

$$
(7'')\quad \vec{a}^{(m)''}_{Mr} = \lambda''_m\,\vec{a}^{m}_{M} \quad , \quad \lambda''_m = \frac{1}{2}\,\frac{A_m + A_m(\vec{u}_3) - \sqrt{(A_m - A_m(\vec{u}_3))^2 - B_m^2(\vec{u}_3)}}{A_m\cdot A_m(\vec{u}_3) + B_m^2(\vec{u}_3)}\,,
$$

$$
(8)\quad \begin{cases}
A_{m+1} = \dfrac{dA_m}{dt} + \vec{\omega}\cdot\vec{B}_m \quad , & \vec{B}_{m+1} = \dfrac{d\vec{B}_m}{dt} - \vec{\omega}\,A_m\,,\\
A_1(\vec{u}_3) = (\vec{\omega}\cdot\vec{u}_3)(\vec{\omega}\cdot\vec{u}_3) & \text{per}\quad A_1 = (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}),\\
A_2(\vec{u}_3) = 3\,(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u}_3)(\vec{\omega}\cdot\vec{u}_3) & \text{per}\quad A_2 = 3\,(\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{\omega})\ \text{ecc.,}\\
B_1(\vec{u}_3) = \vec{B}_1\cdot\vec{u}_3 = (\vec{\omega}^{(2)}\cdot\vec{u}_3) & \text{per}\quad \vec{B}_1 = \vec{\omega}^{(2)},\\
B_2(\vec{u}_3) = \vec{B}_2\cdot\vec{u}_3 = (\vec{\omega}^{(3)}\cdot\vec{u}_3) - & \text{per}\quad \vec{B}_2 = \vec{\omega}^{(3)} - \vec{\omega}\,(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\\
\quad - (\vec{\omega}\cdot\vec{u}_3)(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}) & \text{ecc.,}
\end{cases}
$$

ove $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ è il versore della normale corrispondente alla giacitura di un piano rigido determinato dai versori $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ spiccati da un suo punto M_0 e trovatosi in un moto spaziale generale, vi hanno luogo i seguenti teoremi.

TEOREMA II. – *I luoghi geometrici delle estremità delle accelerazioni ridotte d'ordine m definite tramite* (7′) *oppure* (7″) *dei punti di un piano rigido* (P) *contenente i versori* $\vec{u}_1$ *e* $\vec{u}_2$ *spiccati da un suo punto* M_0 *e trovatosi in un moto spaziale generale sono altri due piani* (P'_m) *e* (P''_m) *perpendicolari al piano* (P).

TEOREMA III. – *La terna di rette determinate dalle mutue intersezioni dei piani* (P) , (P'_m) , (P''_m) *mentovati nel teorema II è triortogonale.*

TEOREMA IV. – *La tangente trigonometrica dell'angolo formato da una retta* $(\mathfrak{D})$ *di versore* $\vec{u}$ *trovantesi in un moto piano o spaziale*

$$(\mathfrak{D}) \qquad \vec{r}_M = \vec{r}_{M_0} + \mu \vec{u}$$

e la retta

$$(\mathfrak{D}_m) \qquad \vec{r}_{M^*} = \vec{r}_M + \lambda_m \vec{a}_M^{(m)},$$

spettante alle accelerazioni d'ordine m dei suoi punti M *consegue il suo estremo per* $\lambda_m = A_m^{-1}$ *oppure* $\lambda_m = [A_m - A_m(\vec{u})]^{-1}$ *rispettivamente, ciò che corrisponde alle accelerazioni ridotte introdotte nel paragrafo 1.*

TEOREMA V. – *La tangente trigonometrica dell'angolo formato da un piano* (P) *costituito dai punti* M *di giacitura* $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ *spiccata da un suo punto* M_0, *trovantesi in un moto spaziale generale e dal piano* (P_m) *di equazione vettoriale*

$$(P_m) \qquad \vec{r}_{M^*} = \vec{r}_{M_0} + \mu_1 \vec{u}_1 + \mu_2 \vec{u}_2 + \lambda_m \vec{a}_M^{(m)},$$

consegue il suo estremo per i valori di λ_m *che soddisfano la relazione*

$$(9) \qquad 1 - \lambda_m (A_m + A_m(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)) + \lambda_m^2 (A_m \cdot A_m(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2) + B_m^2(\vec{u}_1 \times \vec{u}_2)) = 0,$$

ciò che corrisponde ai valori $\lambda_m = \lambda'_m$, $\lambda_m = \lambda''_m$ *che ne caratterizzano le accelerazioni ridotte di seconda specie definite tramite* (7′), (7″).

3. OSSERVAZIONI. – *a*) I risultati conseguiti possono essere applicati, in modo alquanto simile a quello spettante alle accelerazioni ridotte di prima specie [6], allo studio della distribuzione delle accelerazioni nei meccanismi spaziali d'importanza vieppiù crescente nella tecnica odierna. *b*) I risultati acquisiti sono capaci di essere estesi al caso dei moti rigidi delle varietà lineari V_{n-k} immerse nello spazio euclideo E_n, ottenendosi in corrispondenza le *accelerazioni ridotte di specie n — k d'ordine qualunque. c*) Se si tiene conto della definizione data dall'A. P. Kotelnikov [7] per una croce di rette, essendo questa costituita da un insieme di vettori che hanno origine su una delle rette considerate e estremità sull'altra mentre le rette stesse sono perpendicolari tra di loro, si può enunciare, in corrispondenza alla nozione di accelerazione ridotta d'ordine qualunque e di una certa specie, il seguente

TEOREMA VI. – *Ogni varietà lineare* V_{n-k} *immersa in una spazio euclideo* E_n *ad n dimensioni e trovantesi in un moto rigido generale e la varietà luogo delle estremità delle accelerazioni ridotte d'ordine qualunque dei punti di* V_{n-k} *costituiscono una croce Kotelnikov generalizzata.*

Le dimostrazioni, unite ad un'altra mole di risultati e di applicazioni alla teoria dei meccanismi e delle macchine, costituiscono l'oggetto di una Nota più ampia in corso di stampa nel « Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iași ».

BIBLIOGRAFIA.

[1] D. MANGERON, *K grafo–analitičeskim metodam kinematiki material'nyh sistem* (*Sopra i metodi grafo–analitici nella cinematica dei sistemi materiali*), « Doklady Akad. Nauk SSSR », *102*, pp. 897–898 (1955).

[2] —, *O privedennyh uskoreniah ljubogo poreadka i nekotoryh ih extremal'nyh svoistvah* (*Sopra le accelerazioni ridotte d'ordine qualunque ed alcune loro proprietà estremali*), « Doklady Akad. Nauk SSSR », *112*, pp. 27–28 (1957).

[3] —, *Prostranstvennoe obobščenie krestov Kotel'nikova* (*Estensione spaziale delle croci di Kotelnikov*), « Izvestia Akad. Nauk SSSR, OTN, Mehanika i Mašinostroenie », *1*, pp. 168–169 (1960).

[4] —, *Quelques théorèmes concernant un nouveau procédé d'investigation des machines et mécanismes*, « C. r. de l'Acad. Bulgare Sci. » (sous presse).

[5] A. SIGNORINI, *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*, vol. II. Perrella, Roma.

[6] D. MANGERON, C. DRĂGAN, *On the reduced accelerations method in the theory of spacial four–lincages mechanisms*, « Revue de Mécanique appl. », 7, 1, pp. 41–62 (1962).

[7] A. P. KOTELNIKOV, *Zametka po grafičeskoi dinamike* (*Nota sulla dinamica grafica*), « Trudy Moskovskogo vysšego tehn. uč. im. Baumana », *29–30*, pp. 3–27 (1937).