Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giuseppe Vaccaro

Sopra alcune classi di superficie rigate nello spazio ordinario

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.4, p. 499–504.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_4_499_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Geometria. — *Sopra alcune classi di superficie rigate nello spazio ordinario* (*). Nota di GIUSEPPE VACCARO, presentata (**) dal Socio A. TERRACINI.

1. INTRODUZIONE. – In due Note recenti [1] il prof. A. Terracini ha determinato alcune classi notevoli di superficie rigate (nello spazio proiettivo a tre dimensioni) servendosi dell'invariante di due elementi differenziali del 1° ordine di superficie rigate calcolato dalla Sig.na M. Rolando [2].

Mi permetto di ritornare sull'argomento sia per darne una trattazione alquanto diversa e individuare altre classi notevoli di superficie rigate, sia, e sopratutto, in vista della trattazione di problemi analoghi relativi a rigate appartenenti ad un iperspazio.

La configurazione che serve di base alle considerazioni del prof. Terracini è costituita da una retta s, e da una proiettività non singolare σ *intorno ad* s, cioè fra la punteggiata e il fascio di piani di sostegno s (questo è, in termini finiti, l'elemento differenziale del 1° ordine di rigata). Indicheremo questa configurazione con (s, σ) [3].

Sia data ora una rigata R descritta da una retta $g(t)$, al variare di t in un intervallo assegnato, di classe di differenziabilità almeno C^1; ad un punto $P \in s$ e ad una determinata $g(t)$ (cioè per un valore assegnato di t) si associino gli enti seguenti: il piano σP; il punto $P_g = \sigma P \cap g(t)$; il piano tangente τ in P_g ad R; il punto $\overline{P} = \tau \cap s$. La corrispondenza $P \longleftrightarrow \overline{P}$ su s è una proiettività ω_g (dipendente dalla $g(t)$ considerata, oltre che da (s, σ) e da $R \supset g$) [4].

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 1 del C.N.R. per l'anno 1961–62.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1962.

(1) Cfr. A. TERRACINI, *Una nuova caratterizzazione delle rigate di un complesso lineare*, « Boll. U.M.I. », ser. III, a. XVI, pp. 332–339 (1961); ID., *Sur une classe particulière de surfaces reglées*, « Bull. Soc. Roy. des Sciences de Liége », t. XXXI, pp. 9–14 (1961).

(2) Cfr. M. ROLANDO, *Invarianti proiettivi simultanei di un elemento di rigata e di un altro elemento*, « Boll. U.M.I. », ser. III, a. XVI, pp. 319–331 (1961).

(3) La nozione di elemento differenziale di rigata (quali si siano l'ordine ν dell'elemento e la dimensione dello spazio ambiente) trovasi già in E. BOMPIANI, *Alcune proprietà proiettivo-differenziali dei sistemi di rette negli iperspazi*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XXXVII, pp. 1–27 (1914), cfr. n. 15 ove un tale elemento è indicato con $\mathfrak{G}^\nu$.

(4) L'esistenza e il significato geometrico dell'invariante (di questa proiettività, cioè) di (s, σ) e dell'analoga configurazione costituita da $g(t)$ e dalla proiettività di Chasles relativa a $g(t)$ e ad R sono immediati se ci si riferisce alla rappresentazione delle rette sulla quadrica di Klein $Q \subset S_5$. Infatti le due rette s, g si rappresentano in due punti della quadrica di Klein e le due configurazioni in due tangenti a Q in essi. Lo S_3 di queste due tangenti sega Q in una quadrica Q′: i piani tangenti a Q′ nei due punti si segano in una retta: le intersezioni di questa con Q′ e con le due tangenti formano una quaterna il cui birapporto è un invariante delle due configurazioni (o elementi differenziali del 1° ordine di rigata).

Il prof. Terracini determina: 1° le rigate R per cui le ω_g sono involuzioni (e queste appartengono a complessi lineari); 2° le rigate R per cui le ω_g hanno lo stesso invariante assoluto (di cui il precedente è caso particolare).

Qui vengono determinate le rigate per le quali le ω_g soddisfano ad altre condizioni: 3° di essere tutte coincidenti; 4° di avere gli stessi punti uniti; 5° di avere in comune un punto unito; 6° di avere i punti uniti variabili in una stessa involuzione.

Si esaminano poi le analoghe delle proiettività ω_g relative ad una rigata e alla configurazione di rette sghembe.

2. LE PROIETTIVITÀ ω_g. - Si scelga il riferimento proiettivo nello spazio a tre dimensioni in modo che la retta s sia rappresentata dalle equazioni: $x^3 = x^4 = 0$, e che la proiettività σ faccia corrispondere al punto $P(\lambda, 1, 0, 0)$ il piano $\sigma P : x^3 = \lambda x^4$.

La retta $g(t)$ di coordinate radiali g^{ik} è determinata dai suoi punti $(g^{13}, g^{23}, 0, -g^{34})$, $(g^{14}, g^{24}, g^{34}, 0)$ e quindi il punto $P_g = \sigma P \cap g$ ha le coordinate:

$$g^{13} - \lambda g^{14} \quad , \quad g^{23} - \lambda g^{24} \quad , \quad -\lambda g^{34} \quad , \quad -g^{34} .$$

Se, come supponiamo, $g(t)$ è ghemba con s, $g(t) \cap s = \emptyset$, è $g^{34} \neq 0$. Il piano tangente in P_g alla rigata R $\left(\text{posto } \dot{g}^{ik} = \frac{dg^{ik}}{dt}\right)$ è:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ \dot{g}^{13} - \lambda \dot{g}^{14} & \dot{g}^{23} - \lambda \dot{g}^{24} & -\lambda \dot{g}^{34} & -\dot{g}^{34} \\ g^{13} & g^{23} & 0 & -g^{34} \\ g^{14} & g^{24} & g^{34} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Poiché le g^{ik} sono coordinate omogenee e $g^{34} \neq 0$, può farsi $g^{34} = 1$, quindi $\dot{g}^{34} = 0$. Così facendo, se $\bar{P}(\bar{\lambda}, 1, 0, 0)$ è l'intersezione di detto piano tangente con s $(x^3 = x^4 = 0)$ deve aversi:

$$\bar{\lambda}(\dot{g}^{23} - \lambda \dot{g}^{24}) - \dot{g}^{13} + \lambda \dot{g}^{14} = 0,$$

cioè l'equazione di ω_g è:

$$\bar{\lambda}\lambda \dot{g}^{24} - \bar{\lambda}\dot{g}^{23} - \lambda \dot{g}^{14} + \dot{g}^{13} = 0. \tag{2.1}$$

3. LE CONDIZIONI DI TERRACINI. - La condizione (di Terracini) [5] che ogni ω_g sia involuzione è che (per ogni t):

$$\dot{g}^{23} = \dot{g}^{14}, \tag{3.1}$$

cioè integrando (e ritornando a g^{ik} omogenee):

$$g^{23} - g^{14} = c g^{34} \qquad (c \text{ costante}), \tag{3.2}$$

che esprime l'appartenenza di R ad un complesso lineare contenente (s, σ) [6].

(5) Data nella prima Nota citata.

(6) Ciò significa che s è retta del complesso e che la proiettività da questo determinata (in conseguenza della polarità nulla) intorno ad s coincide con σ.

Se si sceglie lo spigolo opposto ad s (che non è stato determinato) come retta del complesso ($g^{34} = 1$ e tutte le altre $g^{ik} = 0$) risulta $c = 0$.

Passando all'immagine sulla quadrica di Klein Q, la (s, σ) è rappresentata da un punto di Q e da una tangente ivi: un S_4 per questa rappresenta un complesso lineare con la proprietà voluta, e una curva di $S_4 \cap Q$, che dipende sostanzialmente da due funzioni arbitrarie di un parametro, rappresenta R.

L'altra condizione (pure di Terracini) (7) che tutte le ω_g abbiano lo stesso invariante assoluto porta che questo è costante al variare di t, cioè riferendosi alla (2.1):

$$\dot{g}^{24}\dot{g}^{13} - \dot{g}^{14}\dot{g}^{23} = k(\dot{g}^{14} - \dot{g}^{23})^2, \qquad k \text{ costante.} \tag{3.3}$$

(il caso precedente corrisponde a $1/k = 0$).

Se $\dot{g}^{13} \neq 0$, si può sempre supporre di aver fatto già un cambiamento del parametro t in modo che risulti $\dot{g}^{13} = 1$, quindi (a meno di una costante inessenziale) $g^{13} = t$; segue allora dalla precedente:

$$g^{24} = \int \{\dot{g}^{14}\dot{g}^{23} + k(\dot{g}^{14} - \dot{g}^{23})^2\}\, dt + ag^{34}, \tag{3.4}$$

cioè le rigate indicate si ottengono con una semplice quadratura (8).

4. ALTRE CONDIZIONI RELATIVE A (s, σ) E LE CLASSI DI RIGATE DA ESSE DETERMINATE. – Possiamo determinare altre classi di rigate imponendo alle ω_g diverse condizioni:

1° Supponiamo anzitutto che tutte le ω_g coincidano. Devono esistere in tal caso quattro costanti a, b, c, d tali che:

$$\frac{\dot{g}^{24}}{a} = \frac{\dot{g}^{23}}{b} = \frac{\dot{g}^{14}}{c} = \frac{\dot{g}^{13}}{d}; \tag{4.1}$$

integrando le tre equazioni differenziali scritte si hanno tre equazioni lineari a coefficienti costanti nelle g^{ik}, cioè la superficie è una quadrica cui appartiene la configurazione (s, σ). La proposizione reciproca è ovvia.

2° Imponiamo ora che le coppie dei punti uniti delle proiettività ω_g siano fisse al variare di g. L'equazione che fornisce i punti uniti della (2.1) è:

$$\lambda^2 \dot{g}^{24} - \lambda(\dot{g}^{23} + \dot{g}^{14}) + \dot{g}^{13} = 0. \tag{4.2}$$

Le condizioni imposte portano l'esistenza di tre costanti a, b, c tali che:

$$\frac{\dot{g}^{24}}{a} = \frac{\dot{g}^{23} + \dot{g}^{14}}{b} = \frac{\dot{g}^{13}}{c}, \tag{4.3}$$

quindi integrando si hanno due relazioni (non equivalenti) del tipo:

$$\alpha g^{24} + \beta(g^{23} + g^{14}) + \gamma g^{13} + \delta g^{34} = 0, \tag{4.4}$$

(7) Data nella seconda Nota citata.
(8) Si confronti con la (2.13) della Nota ricordata in (7).

con $\alpha, \cdots, \delta$ costanti. Allo scopo di interpretare il carattere dei complessi di questo tipo, determiniamo i complessi contenenti la configurazione (s, σ). Se p è una retta di un tale complesso, l'equazione di questo è del tipo:

$$\mu (p^{14} - p^{23}) + \nu p^{34} = 0,$$

o in coordinate duali p_{ik} ($p_{ik} = p^{hl}$ con $ikhl$ permutazione pari di 1234, quindi $p_{23} = p^{14}$, $p_{14} = p^{23}$, $p_{12} = p^{34}$):

$$\mu (p_{23} - p_{14}) + \nu p_{12} = 0.$$

Un complesso contenente s

$$a_{13} g^{13} + a_{14} g^{14} + a_{23} g^{23} + a_{24} g^{24} + a_{34} g^{34} = 0,$$

che sia in involuzione coi precedenti deve avere $a_{23} = a_{14}$, cioè è precisamente del tipo (4.4).

Un tale complesso si dirà in involuzione con la configurazione (s, σ); e così una congruenza determinata da due tali complessi. Si ha quindi:

Data una configurazione (s, σ), *una rigata* R *per cui tutte le proiettività* ω_g *abbiano gli stessi punti uniti appartiene necessariamente ad una congruenza in involuzione con* (s, σ) *e viceversa.*

Le congruenze in involuzione con (s, σ) sono ∞^4; fra esse ve ne sono ∞^2 tali che le rigate ad esse appartenenti dànno luogo ad ω_g con gli stessi punti uniti.

Dati questi e assuntili, come si può, come vertici $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, 0)$ del riferimento, le congruenze le cui rigate hanno la proprietà voluta sono:

$$g^{24} = a g^{34} \quad , \quad g^{13} = b g^{34}$$

con a, b costanti arbitrarie.

3° Cerchiamo le rigate R per cui tutte le ω_g su s hanno in comune un solo punto unito. L'equazione (4.2) deve essere del tipo

$$\dot{g}^{13} [f(t) \lambda - 1] [a\lambda - 1] = 0 \qquad a \text{ costante,}$$

quindi

$$\dot{g}^{24} = a f(t) \dot{g}^{13} \quad , \quad \dot{g}^{23} + \dot{g}^{14} = \dot{g}^{13} (f(t) + a),$$

ed eliminando $f(t)$:

$$\dot{g}^{24} = a (\dot{g}^{23} + \dot{g}^{14}) - a^2 \dot{g}^{13},$$

da cui integrando:

$$g^{24} = a (g^{23} + g^{14}) - a^2 g^{13} + c g^{34} \qquad (a, c \text{ costanti}).$$

Questa è l'equazione di un complesso lineare in involuzione con (s, σ), ma non è il più generale complesso di questo tipo a causa del legame fra i coefficienti di $g^{23} + g^{14}$ e di g^{13}. Si constata facilmente che questo legame porta che il complesso è speciale. La direttrice di questo complesso è la retta congiungente i punti $(1, a, 0, 0)$ e $(0, c, 1, a)$, quindi la direttrice è una retta incidente s nel primo dei due punti e contenuta nel piano che σ fa corrispondere ad esso. Quindi:

Data $(s\,,\sigma)$, *una rigata* R *che dia luogo a proiettività* ω_g *aventi uno stesso punto unito è contenuta in uno dei complessi speciali in involuzione con* $(s\,,\sigma)$: *la direttrice incide s in un punto e appartiene al piano ad esso corrispondente in* σ.

4° Consideriamo infine le rigate ω_g tali che i punti uniti delle proiettività ω_g descrivano un'involuzione (non degenere). Possiamo sempre prendere $g^{13} = t$ perché $\dot g^{13} \neq 0$ (altrimenti si avrebbe un punto unito fisso in $\lambda = 0$) e scrivere l'equazione che dà i punti uniti di una ω_g (relativa al valore t del parametro):

$$\dot g^{24}\lambda^2 - (\dot g^{23} + \dot g^{14})\lambda + 1 = 0 .$$

Questa e le equazioni che se ne ottengono derivano due volte rispetto a t devono dare tre coppie di una stessa involuzione, quindi:

$$\begin{vmatrix} \dot g^{24} & \dot g^{23} + \dot g^{14} & 1 \\ \ddot g^{24} & \ddot g^{23} + \ddot g^{14} & 0 \\ \dddot g^{24} & \dddot g^{23} + \dddot g^{14} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè:

$$\frac{\dddot g^{24}}{\ddot g^{24}} = \frac{\dddot g^{23} + \dddot g^{14}}{\ddot g^{23} + \ddot g^{14}} ,$$

da cui con una prima integrazione si ha:

$$\ddot g^{24} = a\,(\ddot g + \ddot g^{14}) , \qquad (a \text{ costante})$$

e con successive integrazioni:

$$g^{24} = a\,(g^{23} + g^{14}) + b g^{13} + c g^{34} ; \qquad (b\,,c \text{ costanti}). \tag{4.5}$$

Le due coppie che definiscono l'involuzione sono:

$$(a\lambda - 1)\,\lambda = 0 \quad , \quad b\lambda^2 + 1 = 0 .$$

L'equazione (4.5) che lega le g^{ik} è del tipo (4.4) e quindi per la caratterizzazione già data di questi complessi si ha:

Data una configurazione $(s\,,\sigma)$, *una rigata* R *per cui i punti uniti delle* ω_g *appartengano ad un'involuzione appartiene necessariamente ad un complesso in involuzione con* $(s\,,\sigma)$ *e viceversa.*

5. CLASSI DI RIGATE DETERMINATE DA DUE RETTE SGHEMBE. – Altre classi di rigate si ottengono partendo da configurazioni differenti e seguendo procedimenti analoghi ai precedenti.

Si consideri per esempio la configurazione costituita da due rette sghembe $s\,, r$ e una rigata R. Si costruisce una proiettività su s nel modo seguente: dato un punto $\mathrm{P} \in s$ si determini il piano Pr e la sua intersezione con una generatrice g di R; il piano tangente ad R in questo punto sega s in un punto $\overline{\mathrm{P}}$. La corrispondenza $\mathrm{P} \longleftrightarrow \overline{\mathrm{P}}$ così generata fra punteggiate sovrapposte su s è una proiettività ω_g che dipende dalla configurazione $(s\,,r)$ e dall'$\mathfrak{G}^1$ di R determinato da g.

Scelto il riferimento in modo che sia $s : x^3 = x^4 = 0$, $r : x^1 = x^2 = 0$ e una generatrice di R sia g di coordinate $g^{ik}(t)$ e quindi un suo punto x abbia coordinate $x^i = g^{i3} + \mu g^{i4}$, il piano per $\mathrm{P}(\lambda, 1, 0, 0)$ e per $r : x^1 = \lambda x^2$ sega $g(t)$ in un punto per cui μ soddisfi alla relazione (per $g^{34} = 1$):

$$\lambda = \frac{g^{13} + \mu g^{14}}{g^{23} + \mu g^{24}} . \tag{5.1}$$

Il piano tangente ad R nel punto di $g(t)$ di parametro μ ha equazione:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ g^{13} & g^{23} & 0 & -1 \\ g^{14} & g^{24} & 1 & 0 \\ \dot{g}^{13} + \mu \dot{g}^{14} & \dot{g}^{23} + \mu \dot{g}^{24} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

quindi ad esso appartiene $\overline{\mathrm{P}}(\overline{\lambda}, 1, 0, 0)$ per

$$\overline{\lambda} = \frac{\dot{g}^{13} + \mu \dot{g}^{14}}{\dot{g}^{23} + \mu \dot{g}^{24}} . \tag{5.2}$$

L'eliminazione di μ fra le (5.1) e (5.2) dà la proiettività ω_g:

$$\overline{\lambda}\lambda(\dot{g}^{23} g^{24} - \dot{g}^{24} g^{23}) - \overline{\lambda}(\dot{g}^{23} g^{14} - \dot{g}^{24} g^{13}) - \lambda(\dot{g}^{13} g^{24} - \dot{g}^{14} g^{23}) + \dot{g}^{13} g^{14} - \dot{g}^{14} g^{13} = 0.$$

Affinché la proiettività non sia degenere occorre che al variare di μ variino sia λ sia $\overline{\lambda}$, cioè:

$$g^{13} g^{24} \neq g^{23} g^{14} \quad , \quad \dot{g}^{13} \dot{g}^{24} \neq \dot{g}^{23} \dot{g}^{14}, \tag{5.3}$$

e la prima porta di conseguenza $g^{12} g^{34} = 0$.

Se ora si ripetono riguardo a queste proiettività ω_g le ipotesi fatte nei numeri precedenti si hanno nuove classi di superficie rigate.

Per esempio la condizione affinché tutte le ω_g siano involuzioni dà:

$$\dot{g}^{23} g^{14} - \dot{g}^{24} g^{13} = \dot{g}^{13} g^{24} - \dot{g}^{14} g^{23}, \tag{5.4}$$

e integrando si ha (ritornando a coordinate omogenee):

$$g^{13} g^{24} - g^{14} g^{23} = c\,(g^{34})^2,$$

o anche, tenuto conto dell'identità quadratica fra le g^{ik} (e di $g^{34} = 0$):

$$g^{12} = c g^{34}, \tag{5.5}$$

cioè le rigate volute appartengono ad un complesso lineare che non contiene le rette s, r. Esso è in involuzione (qualunque sia c) con gli ∞^3 complessi lineari contenenti s, r; quindi:

Le rigate tali che le proiettività da esse determinate sulla coppia (s, r) *siano involuzioni, appartengono ad uno qualsiasi dei complessi lineari in involuzione con gli* ∞^3 *complessi lineari contenenti* s, r.

In modo analogo si esaminano le rigate per cui le ω_g soddisfano le altre condizioni imposte nei nn. 3 e 4.