Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Roberto Conti

Problemi quasi lineari negli spazi di Banach

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.4, p. 495–498.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_4_495_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi. — *Problemi quasi lineari negli spazi di Banach.* Nota di ROBERTO CONTI, presentata [*] dal Socio G. SANSONE.

1. Numerosi problemi esistenziali dell'Analisi (tra cui molti « problemi ai limiti ») rientrano nella seguente formulazione.

Sono assegnati tre spazi di Banach B, B_1, B_2, *e quattro trasformazioni continue* L_1, H_1, L_2, H_2, *da* B *in* B_1 *le prime due*

$$L_1 u \in B_1 \quad , \quad H_1 u \in B_1 , \qquad u \in B$$

da B *in* B_2 *le ultime due*

$$L_2 u \in B_2 \quad , \quad H_2 u \in B_2 , \qquad u \in B.$$

Inoltre le trasformazioni L_1, L_2 *sono lineari.*

Si cercano soluzioni $u \in B$ *del sistema costituito dalle due equazioni*

$$L_1 u = H_1 u \tag{1}$$

$$L_2 u = H_2 u. \tag{2}$$

2. Nel caso $B_2 = E_n$ (spazio euclideo n–dimensionale) questo problema è stato recentemente risolto in un interessante lavoro di H. Ehrmann [1] cui faremo riferimento anche in seguito.

Qui saranno indicate condizioni più generali per la risolubilità del problema, senza la restrizione $B_2 = E_n$.

Adotteremo anzitutto l'ipotesi che

i) *esista una trasformazione lineare* $\tilde{L}_1$, *da* B_1 *in* B, *tale che*

$$L_1 \tilde{L}_1 u_1 = u_1 , \qquad u_1 \in B_1 \tag{3}$$

e tale inoltre che

ii) *la trasformazione* $\tilde{L}_1 H_1$, *di* B *in sè, sia completamente continua.*

Supporremo poi che

iii) *detto* B_0 *lo spazio nullo di* L_1, *ossia l'insieme degli* $u_0 \in B$ *tali che*

$$L_1 u_0 = 0_1$$

(0_1, *origine di* B_1), *e indicata con* L_{20} *la restrizione di* L_2 *a* B_0, *esista una trasformazione lineare e continua* $\tilde{L}_{20}$ *da* B_2 *in* B_0, *tale che*

$$\tilde{L}_{20} L_{20} u_0 = u_0 , \qquad u_0 \in B_0 \tag{4}$$

(*) Nella seduta del 14 aprile 1962.

(1) H. EHRMANN, *Ein Existenzsatz für die Lösungen gewisser Gleichungen mit Nebenbedingungen bei beschränkter Nichtlinearität*, « Arch. for Rat. Mech. and Anal. », 7, 249–358 (1961).

e che

iv) *la trasformazione* $\tilde{L}_{20} H_2$, *di* B *in* B_0, *sia completamente continua.*

Infine supponiamo che

v) *le trasformazioni* L_1, L_2, H_1, H_2, $\tilde{L}_1$, L_{20}, $\tilde{L}_{20}$ *siano legate dalla relazione di compatibilità*

$$(5) \qquad (L_{20}\tilde{L}_{20} - I_2)(L_2 \tilde{L}_1 H_1 u - H_2 u) = o_2 , \qquad u \in B$$

dove I_2 *rappresenta la trasformazione identica in* B_2, *e* o_2 *è l'origine di* B_2.

Possiamo allora tradurre il problema della ricerca di soluzioni delle (1), (2) in quello della ricerca di $u \in B$ invarianti rispetto ad una opportuna trasformazione continua T di B in sé, e precisamente la

$$(6) \qquad Tu = \tilde{L}_{20} H_2 u - \tilde{L}_{20} L_2 \tilde{L}_1 H_1 u + \tilde{L}_1 H_1 u , \qquad u \in B.$$

Infatti si ha

$$(7) \qquad \tilde{L}_{20} H_2 u - \tilde{L}_{20} L_2 \tilde{L}_1 H_1 u \in B_0 , \qquad u \in B$$

quindi

$$L_1 (\tilde{L}_{20} H_2 u - \tilde{L}_{20} L_2 \tilde{L}_1 H_1 u) = o_1 , \qquad u \in B$$

e pertanto

$$L_1 Tu = L_1 \tilde{L}_1 H_1 u , \qquad u \in B$$

e per la (3)

$$(8) \qquad L_1 Tu = H_1 u , \qquad u \in B.$$

Ancora per la (7) possiamo scrivere

$$L_2 Tu = L_{20} (\tilde{L}_{20} H_2 u - \tilde{L}_{20} L_2 \tilde{L}_1 H_1 u) + L_2 \tilde{L}_1 H_1 u$$

e per la (5)

$$(9) \qquad L_2 Tu = H_2 u , \qquad u \in B.$$

La (8) e la (9) mostrano che ogni soluzione di

$$(10) \qquad u = Tu$$

è anche soluzione di (1), (2).

3. Per risolvere la (10) scriviamo la (6) come

$$(11) \qquad Tu = \tilde{L}_{20} H_2 u - (\tilde{L}_{20} L_2 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_1) H_1 u , \qquad u \in B$$

da cui ricaviamo

$$(12) \qquad \| Tu \|_B \leq \| \tilde{L}_{20} \| \, \| H_2 u \|_{B_2} + \| \tilde{L}_{20} L_2 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_1 \| \, \| H_1 u \|_{B_1} , \qquad u \in B.$$

Perciò se ammettiamo che

vi) *esistano due numeri positivi* h_1, h_2 *tali che*

$$(13) \qquad \| H_1 u \|_{B_1} \leq h_1 , \qquad u \in B$$

$$(14) \qquad \| H_2 u \|_{B_2} \leq h_2 , \qquad u \in B$$

segue dalla (12)

$$\| Tu \|_B \leq \| \tilde{L}_{20} \| h_2 + \| \tilde{L}_{20} L_2 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_1 \| h_1 , \qquad u \in B \tag{15}$$

ossia T trasforma B in una sfera di B.

Osserviamo ora che per l'ipotesi ii) la trasformazione $(\tilde{L}_{20} L_2 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_1) H_1$ di B in sè, è completamente continua; per l'ipotesi iv) da (11) segue che tale è la T.

Pertanto da un noto teorema di J. Schauder (2) e dalla (15) si ha il

TEOREMA. – *Il problema* (1), (2) *formulato all'inizio ammette soluzioni se sono soddisfatte le ipotesi* i), ii), iii), iv), v), vi).

Inoltre per le soluzioni vale la maggiorazione

$$\| u \|_B \leq \| \tilde{L}_{20} \| h_2 + \| \tilde{L}_{20} L_2 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_1 \| h_1 . \tag{16}$$

4. Se sostituiamo la iii) con la più restrittiva ipotesi

iii)* *la restrizione* L_{20} *di* L_2 *a* B_0 *sia invertibile*

avremo $\tilde{L}_{20} = L_{20}^{-1}$, ossia $L_{20} \tilde{L}_{20} = I_2$, cosicché la (5) è soddisfatta. Pertanto sostituendo iv) con

iv)* *la trasformazione* $L_{20}^{-1} H_2$ *di* B *in* B_0 *sia completamente continua*

si ha il

COROLLARIO 1. – *Il problema* (1), (2) *ammette soluzioni se sono soddisfatte le ipotesi* i), ii), iii)*, iv)*, vi); *vale allora la maggiorazione*

$$\| u \|_B \leq \| L_{20}^{-1} \| h_2 + \| L_{20}^{-1} L_2 \tilde{L}_1 - \tilde{L}_1 \| h_1 . \tag{17}$$

Osserviamo che ii) è certamente verificata, in virtù della (13), se supponiamo che

ii)* $\tilde{L}_1$ *sia completamente continua.*

Analogamente, iv) è verificata, in virtù della (14), se supponiamo che

iv)* $\tilde{L}_{20}$ *sia completamente continua.*

Questa sarà verificata, in particolare se si ammette che

iv)** *sia* $B_2 = E_n$ *ed* $\tilde{L}_{20}$ *sia continua*

poiché, sempre per la (14), H_2 trasforma $B_2 = E_n$ in un insieme limitato e quindi compatto. Se vale la iii)* allora $\tilde{L}_{20} = L_{20}^{-1}$ è certamente continua e si ha il

COROLLARIO 2. – *Se* $B_2 = E_n$ (spazio euclideo n–dimensionale) *il problema* (1), (2) *ammette soluzioni se valgono le ipotesi* i), ii), iii)*, vi).

Nel lavoro citato al n. 2 H. Ehrmann ha risolto il problema (1), (2) nel caso $B_2 = E_n$, supponendo verificate le ipotesi i), ii)*, iii)*, vi) ed introducendo altre condizioni che gli consentono di utilizzare, in luogo del teorema di J. Schauder al quale abbiamo fatto ricorso, il più semplice teorema di L. E. J. Brouwer sull'esistenza di punti invarianti rispetto ad una trasformazione continua di E in una sua sfera.

(2) J. SCHAUDER, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, « Studia Math. », *2*, 171–180, Satz 2 (1930).

Tali condizioni sono le seguenti: B_0 abbia dimensione n ed inoltre l'equazione

$$u = u_0 + \tilde{L}_1 H_1 u , \qquad u_0 \in B_0$$

(le cui soluzioni sono anche soluzioni di (1), in virtù dell'ipotesi i)) ammetta per ogni $u_0 \in B_0$ soltanto una soluzione.

5. L'ipotesi vi) potrebbe facilmente essere attenuata. Estensioni del genere, relative al caso particolare della trasformazione

$$L_1 = d/dt - A(t)$$

sono indicate in lavori recenti dell'autore e di G. Pulvirenti [3] ai quali rimandiamo il lettore.

(3) R. CONTI, *Problèmes linéaires pour les équations différentielles ordinaires*, «Math. Nachrichten», 23, 161–178 (1961); *Equazioni differenziali ordinarie quasi lineari con condizioni lineari*, «Ann. di Mat. pura ed appl.», (4), 57, 49–62 (1962); G. PULVIRENTI, *Problemi lineari per le equazioni differenziali ordinarie in uno spazio di Banach*, «Le Matematiche», vol. XV, 98–107 (1960); *Equazioni differenziali ordinarie quasi lineari con condizioni quasi lineari* (in corso di pubbl.).