Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Ossicini

Nuova formula asintotica per i polinomi di Laguerre

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.4, p. 488–494.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_4_488_0¿

Analisi matematica. — *Nuova formula asintotica per i polinomi di Laguerre* (*). Nota di ALESSANDRO OSSICINI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. È nota la seguente formula asintotica di tipo Hilb, per i polinomi di Laguerre [1]

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = \dfrac{N^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} J_\alpha\{2(Nx)^{1/2}\} + \delta_{n\alpha}(x) \\ \alpha > -1 \qquad N = n + \dfrac{\alpha+1}{2} \end{cases}
$$

ove

$$
(1.2)\qquad \delta_{n,\alpha}(x) = \begin{cases} x^{\frac{\alpha}{2}+2}\, O(n^\alpha) & 0 < x \leq n^{-1} \\ x^{\frac{5}{4}}\, O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) & n^{-1} \leq x \leq \omega . \end{cases}
$$

Nel caso $\alpha = 0$ la prima limitazione va sostituita con $x^2 \log(x^{-1} n^{-1})$. Vogliamo dimostrare qui con un procedimento elementare la nuova formula asintotica

$$
e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{N^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\left[\left(1+\frac{x}{24\,N}\right) J_\alpha\{2(Nx)^{1/2}\} + \right.
$$

$$
\left. -\frac{1}{24}\frac{\sqrt{x}}{N^{3/2}}(2\,xN + \alpha^2 - 1)\, J'_\alpha\{2(Nx)^{1/2}\}\right] + \varepsilon_{n,\alpha}(x)
$$

$$
\alpha > -1 \qquad N = n + \frac{\alpha+1}{2}
$$

ove

$$
\varepsilon_{n,\alpha}(x) = \begin{cases} x^{\frac{\alpha}{2}+4}\, O(n^\alpha) & 0 < x < n^{-1} \\ x^{\frac{13}{4}}\, O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) & n^{-1} \leq x \leq \omega . \end{cases}
$$

(*) Lavoro del gruppo di ricerca n. 22 del Comitato per la Matematica del C.N.R., eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1962.

(1) E. M. WRIGHT, *The coefficients of a certain power series*, « Journal of the London Mathematical Society », vol. 7, p. 261 (1932).

Nel caso $\alpha = 0$ la prima limitazione va sostituita con $x^4 \, O\{\log x^{-1} n^{-1}\}$. Per la dimostrazione utilizzeremo l'equazione di tipo Volterra, alla quale soddisfa la funzione $e^{-\frac{x^2}{2}} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x^2)$ (2)

$$(1.3) \qquad e^{-\frac{x^2}{2}} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x^2) = \frac{N^{-\frac{\alpha}{2}} \Gamma(n+\alpha+1)}{n!} J_\alpha(2 N^{1/2} x) + \int_0^x F_\alpha(x, t)\, e^{-\frac{t^2}{2}} t^{\alpha+3} L_n^{(\alpha)}(t^2)\, dt,$$

ove

$$(1.4) \qquad F_\alpha(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2 \operatorname{sen} \alpha\pi} [J_\alpha(2 N^{1/2} x) J_{-\alpha}(2 N^{1/2} t) - J_{-\alpha}(2 N^{1/2} x) J_\alpha(2 N^{1/2} t)], & \alpha \text{ non intero} \\ -\dfrac{\pi}{2} [J_\alpha(2 N^{1/2} x) Y_\alpha(2 N^{1/2} t) - J_\alpha(2 N^{1/2} t) Y_\alpha(2 N^{1/2} x)], & \alpha \geq 0 \text{ intero} \end{cases}$$

essendo $J_\alpha(z)$, $J_{-\alpha}(z)$ funzioni di Bessel di prima specie e $Y_\alpha(z)$ funzioni di Bessel di seconda specie.

Terremo inoltre conto dell'ordine di grandezza delle $J_\alpha(z)$, $Y_\alpha(z)$ per $z \to +0$ e per $z \to +\infty$ (3); se $z \to +0$

$$(1.5) \qquad J_\alpha(z) \sim z^\alpha \qquad \alpha \neq -1, -2, -3, \cdots,$$

$$(1.6) \qquad Y_\alpha(z) \sim z^{-\alpha} \qquad \alpha = 1, 2, 3, \cdots,$$

$$(1.7) \qquad Y_0(z) \sim \log \frac{1}{z}$$

mentre per $z \to +\infty$

$$(1.8) \qquad \begin{cases} J_\alpha(z) = O\left(z^{-\frac{1}{2}}\right) \\ Y_\alpha(z) = O\left(z^{-\frac{1}{2}}\right). \end{cases}$$

2. Se sostituiamo la (1.1) nell'integrale a secondo membro della (1.3) troviamo che

$$(2.1) \qquad \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{2}} x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x^2) = \dfrac{N^{-\frac{\alpha}{2}} \Gamma(n+\alpha+1)}{n!} J_\alpha(2 N^{1/2} x) + \\ + \Lambda_n^{(\alpha)}(x) + R_n^{(\alpha)}(x) \end{cases}$$

(2) G. SZEGO, *Orthogonal Polynomials*, « Amer. Math. Col. Publ. », XXIII, New-York 1939, p. 211.

(3) Cfr. G. SZEGO, op. cit. in (2) p. 16.

ove

$$\Lambda_n^{(\alpha)}(x) = \frac{N^{-\frac{\alpha}{2}}\,\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\int_0^x F_\alpha(x\,,t)\cdot t^3\,J_\alpha(2\,N^{1/2}\,t)\,dt$$

$$R_n^{(\alpha)}(x) = \int_0^x F_\alpha(x\,,t)\,t^3\,\delta_{n,\alpha}(t)\,dt\,.$$

Per poter calcolare l'integrale $\Lambda_n^{(\alpha)}(x)$ è necessario determinare la seguente formula ricorrente [4]

$$(2.2)\qquad 3\int^z z^3\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,dz = 2\,(\alpha^2-1)\int^z z\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,dz$$

$$+\frac{1}{2}\,z^2\,[z^2\,J'_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z)+J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)-z\,(J_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)+J_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z))]$$

$$+\frac{1}{2}\,z^2\,[z^2+1-\alpha^2]\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,.$$

Osserviamo che

$$(2.3)\qquad \int^z z\,(z^2-\alpha^2)\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,dz = -\int^z z\,J_{-\alpha}(z)\left\{z^2\frac{d^2}{dz^2}+z\frac{d}{dz}\right\}J_\alpha(z)\,dz =$$

$$-z^3\,J_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)+\int^z[z^3\,J'_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)+3\,z^2\,J_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)]\,dz\,+$$

$$-\int z^2\,J_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)\,dz =$$

$$-z^3\,J_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)+\int^z[2\,z^2\,J_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)+z^3\,J'_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)]\,dz$$

e analogamente

$$(2.4)\qquad \int^z z\,(z^2-\alpha^2)\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,dz =$$

$$-z^3\,J_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z)+\int^z[2\,z^2\,J_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z)+z^3\,J'_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)]\,dz$$

(4) La (2.2) è un caso particolare di una formula che si trova in una pubblicazione di W. Gross. Nel lavoro ho preferito darne una diretta dimostrazione data l'elementarità. W. GROSS, *Sviluppo asintotico di alcuni integrali operanti su funzioni di Bessel*, « Giornale di Matematiche di Battaglini », ser. IV, vol. 80, pp. 39–49.

quindi

$$(2.5)\qquad 2\int^{z} z(z^2-\alpha^2)\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,dz = -z^3\,[J_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z) + J_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)]$$

$$+\,2\int^{z}\{z^3\,J'_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z) + z^2\,[J_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z) + J'_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)]\}\,dz\,.$$

Ora con una integrazione per parti si ha

$$4\int^{z} z^3\,J'_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z)\,dz = z^4\,J'_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z) + 2\int^{z} z^3\,J'_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z)\,dz$$

$$+\int^{z} z^2\,(z^2-\alpha^2)\,[J'_{-\alpha}(z)\,J_\alpha(z) + J'_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)]\,dz$$

ed in conseguenza

$$(2.6)\qquad 2\int^{z} z^3\,J'_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z)\,dz = z^4\,J'_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z)$$

$$+\int^{z} z^2\,(z^2-\alpha^2)\,[J'_{-\alpha}(z)\,J_\alpha(z) + J'_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)]\,dz$$

sostituendo la (2.6) nella (2.5) si ha

$$2\int^{z} z(z^2-\alpha^2)\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,dz =$$

$$z^4\,J'_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z) - z^3\,[J_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z) + J'_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)]$$

$$+\int^{z} z^2\,[z^2+2-\alpha^2]\,[J'_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z) + J_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z)]\,dz$$

e con una nuova integrazione per parti si perviene alla

$$3\int^{z} z^3\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,dz = 2\,(\alpha^2-1)\int^{z} z\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,dz$$

$$+\frac{1}{2}\,z^2\{z^2\,J'_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z) + J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z) - z\,[J_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z) + J_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z)]\}$$

$$+\frac{1}{2}\,z^2\,(z^2-\alpha^2+1)\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,.$$

Una formula analoga si ha sostituendo ad $J_{-\alpha}(z)$, $Y_\alpha(z)$.

Passiamo ora al calcolo di $\Lambda_n^{(\alpha)}(x)$.

Se teniamo conto della (2.2) e delle seguenti formule [5]

$$(2.7)\qquad 3\int^{z} z^3\,J_\alpha^2(z)\,dz = 2\,(\alpha^2-1)\int^{z} z\,J_\alpha^2(z)\,dz + \frac{1}{2}\,z^2\,[z\,J'_\alpha(z) - J_\alpha(z)]^2$$

$$+\frac{1}{2}\,z^2\,(z^2-\alpha^2+1)\,J_\alpha^2(z)$$

(5) G. N. WATSON, *Bessel Functions*, New-York 1948, pp. 138 e 135.

$$(2.8)\qquad \int^{z} z\,J_\alpha^2(z)\,dz = \frac{1}{2}z^2\,[J_\alpha^2(z) - J_{\alpha-1}(z)\,J_{\alpha+1}(z)]$$

$$(2.9)\qquad \int^{z} z\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z)\,dz = \frac{1}{4}z^2\,[2\,J_\alpha(z)\,J_{-\alpha}(z) + J_{\alpha-1}(z)\,J_{-\alpha-1}(z) + J_{\alpha+1}(z)\,J_{-\alpha+1}(z)]$$

si ha dalle (1.5) che:

$$\Lambda_n^{(\alpha)}(x) = \frac{N^{-\frac{\alpha}{2}}\,\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\,\frac{\pi}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha\pi}\left\{\frac{x^2}{24\,N}\,[J_\alpha(2\,N^{1/2}x)\,J'_{-\alpha}(2\,N^{1/2}x) + {}\right.$$
$$- J_{-\alpha}(2\,N^{1/2}x)\,J'_\alpha(2\,N^{1/2}x)]\cdot[4\,Nx^2\,J'_\alpha(2\,N^{1/2}x) - 2\,N^{1/2}x\,J_\alpha(2\,N^{1/2}x)]$$
$$+ \frac{1}{24\,N}(\alpha^2-1)\,x^2\,J_{\alpha+1}(2\,N^{1/2}x)\,[J_\alpha(2\,N^{1/2}x)\,J_{-\alpha+1}(2\,N^{1/2}x)$$
$$+ J_{-\alpha}(2\,N^{1/2}x)\,J_{+\alpha-1}(2\,N^{1/2}x)] + \frac{1}{24\,N}(\alpha^2-1)\,x^2\,J_{\alpha-1}(2\,N^{1/2}x)$$
$$\left.\cdot[J_\alpha(2\,N^{1/2}x)\,J_{-\alpha-1}(2\,N^{1/2}x) + J_{\alpha+1}(2\,N^{1/2}x)\,J_{-\alpha}(2\,N^{1/2}x)]\right\}$$

ma [6]

$$J_\alpha(z)\,J_{1-\alpha}(z) + J_{-\alpha}(z)\,J_{\alpha-1}(z) = \frac{2\,\mathrm{sen}\,\alpha\pi}{\pi z}$$

$$J_\alpha(z)\,J'_{-\alpha}(z) - J_{-\alpha}(z)\,J'_\alpha(z) = -\frac{2\,\mathrm{sen}\,\alpha\pi}{\pi z}$$

$$J_{\alpha+1}(z) - J_{\alpha-1}(z) = -2\,J'_\alpha(z)$$

quindi

$$(2.10)\qquad \Lambda_n^{(\alpha)}(x) = \frac{N^{-\frac{\alpha}{2}}\,\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\left\{\frac{x^2}{24\,N}\,J_\alpha(2\,N^{1/2}x) + {}\right.$$
$$\left. - \frac{x}{24\,N^{3/2}}\,[2\,x^2\,N + \alpha^2 - 1]\,J'_\alpha(2\,N^{1/2}x)\right\}.$$

Alla stessa espressione si perviene nel caso di α intero tenendo conto della (2.2) ove in luogo di $J_{-\alpha}(z)$ va posto $Y_\alpha(z)$ e delle [7]

$$\int^{z} z\,J_\alpha(z)\,Y_\alpha(z)\,dz = \frac{1}{2}z^2\,[2\,J_\alpha(z)\,Y_\alpha(z) - J_{\alpha-1}(z)\,Y_{\alpha+1}(z) - J_{\alpha+1}(z)\,Y_{\alpha-1}(z)]\,,$$

$$J_\alpha(z)\,Y_{\alpha+1}(z) - J_{\alpha+1}(z)\,Y_\alpha(z) = -\frac{2}{\pi z}$$

e delle (2.7), (2.8).

(6) Cfr. G. WATSON, op. cit. (5) p. 43, p. 46 e p. 45.
(7) Cfr. G. WATSON, op. cit. (5) p. 134, p. 76 e p. 77.

3. Valutazione del resto $R_n^{(\alpha)}(x)$.

A causa della (1.2) dovremo distinguere due casi

$$0 < x \le n^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad n^{-\frac{1}{2}} \le x \le \omega^{\frac{1}{2}} .$$

Se α reale si ha per $0 < x \le n^{-\frac{1}{2}}$, $0 \le t \le x$

$$O(n^{\alpha}) \int_0^x (x^{\alpha} t^7 + x^{-\alpha} t^{2\alpha+7})\, dt = O(n^{\alpha} x^{\alpha+8}) . \tag{3.1}$$

Se invece $\alpha = 0$ abbiamo [8]

$$F_0(x, t) = -\frac{\pi}{2} [J_0(2 N^{1/2} x) Y_0(2 N^{1/2} t) - Y_0(2 N^{1/2} x) J_0(2 N^{1/2} t)] =$$

$$O(1) \log \frac{x}{t} + O(1)$$

e quindi

$$O(1) \int_0^x \left(\log \frac{x}{t}\right) t^7 \log t^{-1} n^{-\frac{1}{2}}\, dt + O(1) \int_0^x t^7 \log t^{-1} n^{-\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$O(1)\, x^8 \int_0^1 \left(\log \frac{1}{z}\right) z^7 \log x^{-1} z^{-1} n^{-\frac{1}{2}}\, dz + O(1)\, x^8 \int_0^1 z^7 \log\left(x^{-1} z^{-1} n^{-\frac{1}{2}}\right) dz =$$

$$x^8\, O\left(\log x^{-1} n^{-\frac{1}{2}}\right) .$$

Se consideriamo poi il caso $n^{-\frac{1}{2}} \le x \le \omega^{\frac{1}{2}}$ il contributo dell'intervallo $0 < t \le n^{-\frac{1}{2}}$ è

$$O(n^{\alpha}) \int_0^{n^{-\frac{1}{2}}} n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} \{ | J_{-\alpha}(2 N^{1/2} t) | + | J_{\alpha}(2 N^{1/2} t) | \} t^{\alpha+7}\, dt = \tag{3.2}$$

$$O(n^{\alpha})\, n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{\alpha}{2}-4} = \left(x^{-1} n^{-\frac{1}{2}}\right)^7 \cdot O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} x^{\frac{13}{2}}\right) = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} x^{\frac{13}{2}}\right)$$

(stessa limitazione per α intero).

Sempre relativamente al caso $n^{-\frac{1}{2}} \le x \le \omega^{\frac{1}{2}}$ a causa delle (1.8) il contributo dell'intervallo $t \ge n^{-\frac{1}{2}}$ è

$$O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}\right) \int_{n^{1/2}}^{x} \left(n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(n^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{2}}\right) t^{11/2}\, dt = O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} x^{\frac{11}{2}}\right) = \tag{3.3}$$

$$O\left(n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}} x^{\frac{13}{2}}\right) .$$

(8) Cfr. G. SZEGO, op. cit., in (2) p. 207.

In base alle (2.1) (2.10) (3.1) (3.2) (3.3) abbiamo quindi

$$e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{N^{-\frac{\alpha}{2}} \Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \left[\left(1 + \frac{x}{24N}\right) J_\alpha \left\{ 2 (Nx)^{1/2} \right\} + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{24} \frac{x^{1/2}}{N^{3/2}} \left[2xN + \alpha^2 - 1 \right] J'_\alpha \left\{ (2Nx)^{1/2} \right\} \right] + \varepsilon_{n,\alpha}(x)$$

$$\alpha > -1 \qquad N = n + \frac{\alpha+1}{2}$$

ove

$$\varepsilon_{n,\alpha}(x) = \begin{cases} x^{\frac{\alpha}{2}+4} O(n^\alpha) & 0 < x < n^{-1} \\ x^{\frac{13}{4}} O\left(n^{\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4}}\right) & n^{-1} \leq x \leq \omega \end{cases}$$

se $\alpha = 0$ la prima limitazione va sostituita con $x^\alpha O\{\log(x^{-1} n^{-1})\}$ (9).

(9) Relativamente agli sviluppi asintotici dei polinomi di Laguerre cfr. L. TOSCANO « Bollettino Unione Matematica Italiana » (3), *4*, 398–409 (1949) ove si trova un notevole sviluppo in serie dei polinomi di Laguerre mediante funzioni di Bessel.