Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Solomon Marcus

Les ensembles stationnaires de certaines classes de fonctions dérivées

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.4, p. 484–487.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_4_484_0¿

Analisi matematica. — *Les ensembles stationnaires de certaines classes de fonctions dérivées.* Nota di SOLOMON MARCUS, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

Sauf mention contraire, toutes les fonctions considérées dans la suite seront des fonctions réelles définies sur l'intervalle $[0, 1]$. Un ensemble $E \subset [0, 1]$ est, par définition, *stationnaire* pour une classe C de fonctions si, pour $f \in C$, f est constante sur $[0, 1]$ dès qu'elle est constante sur E [3]. Dans [3], [4] et [6] on a étudié les ensembles stationnaires des classes suivantes de fonctions: C_1 = la classe des dérivées bornées; C_2 = la classe des dérivées finies; C_3 = la classe des dérivées – finies ou infinies – des fonctions continues. Proprement dit, dans [3] et [4] on a étudié les ensembles déterminants pour C_1 et C_2. Un ensemble E est déterminant pour la classe C si pour $f \in C$, $g \in C$ et $f(x) = g(x)$ pour $x \in E$ on a $f(x) \equiv g(x)$. Il est aisé de voir que pour C_1 et C_2 les ensembles déterminants coïncident avec les ensembles stationnaires. Si l'on désigne par $\Phi(C)$ la famille des ensembles stationnaires de la classe C, alors, de ce que $C_1 \subset C_2 \subset C_3$, on déduit

$$\Phi(C_3) \subset \Phi(C_2) \subset \Phi(C_1).$$

Désignons par F la famille des ensembles contenus dans $[0, 1]$, dont la mesure extérieure est égale à 1. Les résultats de [3], [4] et [6] affirment que

$$\Phi(C_1) = \Phi(C_2) = \Phi(C_3) = F.$$

Désignons: par C_4 la classe des fonctions dérivées – finies ou infinies; par D_1 la classe des dérivées approximatives finies; par D_2 la classe des dérivées approximatives – finies ou infinies – des fonctions continues; par D_3 la classe des dérivées approximatives – finies ou infinies – des fonctions approximativement continues; par D_4 la classe des dérivées approximatives – finies ou infinies.

Par μ, on va désigner la mesure de Lebesgue; par μ^*, la mesure extérieure de Lebesgue.

THÉORÈME 1. – *$\Phi(C_4)$ est formée d'un seul ensemble: l'intervalle* $[0, 1]$.

Démonstration. – Soit $\xi \in [0, 1]$ et posons

$$F(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } 0 \leq \xi < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } x = \xi, \\ 1, & \text{si } \xi < x \leq 1. \end{cases}$$

La dérivée $\varphi(x) = F'(x)$ existe en chaque $x \in [0, 1]$. On a $\varphi(x) = 0$ pour $x \neq \xi$, $\varphi(x) = +\infty$ pour $x = \xi$, donc l'ensemble $[0, 1] - \{\xi\}$ n'ap-

(*) Nella seduta del 14 aprile 1962.

partient pas à $\Phi(C_4)$. Comme ξ est un point arbitraire de $[0, 1]$, il s'ensuit le théorème 1.

Corollaire. – L'intervalle $[0, 1]$ est le seul ensemble stationnaire pour D_4.

THÉORÈME 2. – $\Phi(D_3) = F$.

Démonstration. – On a $C_3 \subset D_3$, donc $\Phi(D_3) \subset \Phi(C_3)$. Mais d'après un théorème de [6], on a $\Phi(C_3) = F$, donc $\Phi(D_3) \subset F$. Pour établir l'inclusion inverse, considérons un ensemble $E \in F$ et supposons, par réduction à l'absurde, qu'il existe une fonction $f \in D_3$, f non constante, et un nombre λ tel que $f(x) = \lambda$ pour $x \in E$. Soit $\xi \in [0, 1]$ tel que $f(\xi) \neq \lambda$.

Supposons d'abord $f(\xi) > \lambda$ et considérons l'ensemble non vide $A = \{x ; f(x) > \lambda\}$. Soit F approximativement continue, telle que $F'_{ap}(x) = f(x)$ pour $x \in [0, 1]$. La fonction $G(x) = F(x) - \lambda x$ est approximativement continue sur $[0, 1]$ et possède, en chaque point $x \in [0, 1]$, une dérivée approximative $G'_{ap}(x)$ – finie ou infinie. En outre, $G_{ap}(x) = F'_{ap}(x) - \lambda$ donc on a $G'_{ap}(x) > 0$ pour $x \in A$ et $G'_{ap}(x) \leq 0$ pour $x \notin A$. Si l'ensemble A était de mesure nulle, alors on aurait, presque partout sur $[0, 1]$, $G'_{ap}(x) \leq 0$, donc, en vertu d'un théorème de G. Tolstov [9], G serait non–croissante sur $[0, 1]$. On aurait donc $f(x) - \lambda \leq 0$ pour chaque $x \in [0, 1]$. Mais ce serait une contradiction avec l'inégalité $f(\xi) > \lambda$. Donc $\mu(A) > 0$. Mais c'est impossible, car $A \cap E = 0$ et $\mu^*(E) = 1$. Donc c'est impossible aussi qu'on ait $f(\xi) > \lambda$.

Supposons maintenant $f(\xi) < \lambda$ et considérons l'ensemble non vide $A_1 = \{x ; f(x) < \lambda\}$. Si A_1 était de mesure nulle, alors on aurait, presque partout sur $[0, 1]$, $G'_{ap}(x) \geq 0$ donc, en vertu du même théorème de [9] cité ci–dessus, G serait non–décroissante sur $[0, 1]$. On aurait donc $f(x) - \lambda \geq 0$ pour chaque $x \in [0, 1]$. Mais ce serait une contradiction avec l'inégalité $f(\xi) < \lambda$. Donc $\mu(A_1) > 0$. Mais c'est impossible, car $A_1 \cap E = 0$ et $\mu^*(E) = 1$. Donc c'est impossible aussi qu'on ait $f(\xi) < \lambda$.

On constate ainsi que la supposition $f(\xi) \neq \lambda$ mène à une contradiction et l'inclusion $F \subset \Phi(D_3)$ est établie.

Corollaire. – $\Phi(D_1) = \Phi(D_2) = F$.

Démonstration. – On a

$$C_1 \subset D_2 \subset D_3 \quad , \quad C_1 \subset D_1 \subset D_3 ,$$

donc

$$\Phi(D_3) \subset \Phi(D_2) \subset \Phi(C_1) \quad , \quad \Phi(D_3) \subset \Phi(D_1) \subset \Phi(C_1) .$$

Mais, d'après le théorème 1 de [3], on a $\Phi(C_1) = F$ et d'après le théorème 2 ci–dessus on a $\Phi(D_3) = F$. Le corollaire est ainsi démontré.

Remarques. – Le théorème 2 contient le théorème de [6], où l'on considère les dérivées – finies ou infinies – des fonctions continues; la méthode employée dans [6] diffère de celle ci–dessus. En tenant compte que pour la classe C_2 les ensembles déterminants coïncident avec les ensembles stationnaires, il est aisé de déduire, du théorème 2, le théorème 2 de [4].

Une classe C de fonctions est, per définition, *invariante par soustraction*, si pour $f \in C$, $g \in C$, $\varphi = f - g$ on a $\varphi \in C$. Il est aisé de voir que les classes C_3,

D_2 et D_3 ne sont pas invariantes par soustraction. Dand une telle situation, il est possible que certains ensembles stationnaires de C_3 (resp. D_2, D_3) ne soient pas déterminants pour C_3 (resp. D_2, D_3). Il est naturel donc de poser le

PROBLÈME. – *Caractériser les ensembles déterminants pour chacune des classes* C_3, D_2 *et* D_3.

Toutes les classes de fonctions considérées ci–dessus sont formées de fonctions dérivées, ordinaires ou approximatives.

On sait qu'une fonction dérivée f' est de la première classe de Baire, même si f est discontinue ([10], pp. 15–16). On sait que les dérivées approximatives des fonctions approximativement continues sont de la première classe de Baire [8]. Donc toutes les classes de fonctions dont nous avons déterminé ci–dessus les ensembles stationnaires sont formées de fonctions de la première classe de Baire. Il est naturel alors de poser le problème s'il existe, dans la deuxième classe de Baire, une classe non triviale de nombres dérivés dont les ensembles stationnaires ne coïncident plus avec les ensembles de mesure extérieure complète.

Dans cet ordre d'idées, il est intéressant à noter le fait suivant.

Considérons une classe C_5, définie de la manière suivante: $\varphi \in C_5$ si φ est finie et s'il existe une fonction continue f, telle que $\varphi(x) = \bar{f}^+(x)$, où par $\bar{f}^+(x)$ on a désigné le nombre dérivé supérieur à droite de la fonction f au point x. On sait qu'une telle fonction φ est au plus de la deuxième classe de Baire (pour un résultat plus général voir [7], p. 127 et [2]). D'autre part, en vertu d'un résultat de F. Sunyer i Balaguer, la fonction f est complètement déterminée (abstraction faite d'une constante additive) par les valeurs que φ prend sur un ensemble E dont le complémentaire est totalement imparfait [1]. Cela veut dire que E rencontre tout ensemble parfait. Supposons alors qu'il y a un nombre réel λ tel que $\varphi(x) = \lambda$ pour $x \in E$ et posons $g(x) \equiv \lambda x$. On a $f(x) \equiv g(x) + k$, où k est une constante, donc $\bar{f}^+(x) \equiv \bar{g}^+(x)$. On en déduit que $\varphi(x) \equiv \lambda$. Réciproquement, si de $\varphi \in C_5$ et $\varphi(x) = \lambda$ pour $x \in E$ on déduit $\varphi(x) \equiv \lambda$, alors, en utilisant le même travail [1], on trouve facilement que E rencontre tout ensemble parfait, c'est–à–dire on a le théorème suivant:

THÉORÈME 3. – *L'ensemble* E *est stationnaire pour la classe* C_5 *si et seulement si* E *rencontre tout ensemble parfait contenu dans* $[0, 1]$.

Remarque concernant le travail [5]. – Dans la démonstration du théorème 3 de [5], par *portion de l'ensemble* Π on entend l'intersection non vide de Π avec un intervalle ouvert. Les extrémités de cet intervalle ouvert, sont, en même temps, les extrémités de la portion.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] SUNYER I BALAGUER, *Sur la détermination d'une fonction par ses nombres dérivés*, « Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) », vol. 245, pp. 1690–1692 (1957).

[2] S. BANACH, *Sur les fonctions dérivées des fonctions mesurables*, « Fundam. Math. », vol. 3, pp. 128–132 (1922).

[3] N. BOBOC–S. MARCUS, *Sur la détermination d'une fonction par les valeurs prises sur un certain ensemble*, « Annales sci. Éc. Norm. Sup. », vol. 76, fasc. 2, pp. 151–159 (1959).

[4] S. MARCUS, *Sur une généralisation de la notion de quasi analyticité*, « Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) », t. 254, N° 6 pp. 985–987 (1962).

[5] S. MARCUS, *Sur les ensembles stationnaires de certaines classes de fonctions*, « Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) », t. 254, N° 7, pp. 1186–1188 (1962).

[6] S. MARCUS, *Asupra mulţimilor staţionare ale funcţiilor derivate-finite sau infinite*, « Comunicările Academiei R. P. R. », vol. XII, N° 4, pp. 401–404 (1962).

[7] W. SIERPINSKI, *Sur les fonctions dérivées des fonctions discontinues*, « Fundam. Math. », vol. 3, pp. 123–127 (1922).

[8] G. TOLSTOV, *Sur la dérivée approximative exacte*, « Matem. Sbornik », N. S., vol. 4, pp. 499–504 (1938).

[9] G. TOLSTOV, *Sur quelques propriétés des fonctions approximativement continues*, « Matem. Sbornik », N. S., vol. 5 (47) pp. 637–645 (1939).

[10] Z. ZAHORSKI, *Sur la première dérivée*, « Transactions of the Amer. Math. Soc. », vol. 69, pp. 1–54 (1950).