Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Wolf Gross

Formula di Taylor e linee di livello delle soluzioni dell'equazione del calore

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.4, p. 477–483.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_4_477_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi matematica. — *Formula di Taylor e linee di livello delle soluzioni dell'equazione del calore* (*). Nota di WOLF GROSS, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

Nel presente lavoro si studia il comportamento locale delle linee di livello $F =$ costante delle soluzioni della equazione del calore:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{1}$$

internamente al campo di definizione.

A questo scopo si determina una conveniente rappresentazione di dette soluzioni mediante una formula tipo quella di Taylor; da essa essenzialmente si deduce con un riordinamento dei termini. L'espressione del resto nella nuova formula serve come punto di partenza per lo studio delle linee di livello.

1. Ricordiamo che internamente all'insieme di definizione le soluzioni dell'equazione del calore posseggono derivate di tutti gli ordini e che:

$$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial t^n} = \frac{\partial^{m+2n} F}{\partial x^{m+2n}},$$

per cui tutte le derivate si esprimono mediante quelle rispetto alla x.

Per brevità poniamo

$$F^{(n)} = \frac{\partial^n F}{\partial x^n}, \tag{2}$$

ed usiamo in questo lavoro la parola omogeneo per un polinomio di due variabili di grado n che soddisfi la:

$$P(\lambda x, \lambda^2 t) = \lambda^n P(x, t). \tag{3}$$

Si vede immediatamente (posto $\lambda = -1$) che i polinomi di grado pari sono pari in x, quelli di grado dispari, dispari in x.

Siano ora H_n i noti polinomi di Hermite definiti mediante la

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{4}$$

Posto:

$$\Phi_n(x, t) = (\sqrt{-t})^n H_n\left(\frac{x}{2\sqrt{-t}}\right). \tag{5}$$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1960-61.

(**) Nella seduta del 14 aprile 1962.

Le funzioni Φ_n sono polinomi omogenei di grado n con termine principale x^n.

Dimostriamo anzitutto che le Φ_n soddisfano la (1). È noto che la $\frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$ soddisfa la (1), e quindi anche la:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-x^2}{4t}}\right) = (-2)^n \frac{1}{(\sqrt{t})^{n+1}} H_n\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) e^{\frac{-x^2}{4t}}$$

ottenuta dalla (4). D'altronde da una soluzione dell'equazione del calore se ne ottiene un'altra mediante la trasformazione

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{-t}} e^{\frac{-x^2}{4t}} \Phi\left(-\frac{x}{t}, -\frac{1}{t}\right).$$

Applicando all'espressione precedente questa trasformazione si ottiene a meno di un fattore la $\Phi_n(x, t)$.

Dalle note relazioni:

$$H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0 \quad , \quad H' = 2nH_{n-1},$$

si ottengono per le Φ_n le relazioni:

$$\Phi_{n+1}(x, t) = x\Phi_n(x, t) + 2nt\,\Phi_{n-1}(x, t), \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_n(x, t)}{\partial x} &= n\,\Phi_{n-1}(x, t) \\ \frac{\partial\Phi_n(x, t)}{\partial t} &= n(n-1)\,\Phi_{n-2}(x, t). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

L'ultima deriva dalla precedente e dalla (1).

Formiamo ora l'espressione:

$$\Phi(\xi, \theta) = F(x, t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(\xi, \theta)\,\Phi_k(x-\xi, t-\theta). \tag{8}$$

Derivandola, applicando la (7), e tenendo conto della (1) si ha:

$$\Phi_\xi(\xi, \theta) = -\frac{1}{(n-1)!} F^{(n)}(\xi, \theta)\,\Phi_{n-1}(x-\xi, t-\theta),$$

$$\Phi_\theta(\xi, \theta) = -\frac{1}{(n-1)!} F^{(n+1)}(\xi, \theta)\,\Phi_{n-1}(x-\xi, t-\theta)$$
$$-\frac{1}{(n-2)!} F^{(n)}(\xi, \theta)\,\Phi_{n-2}(x-\xi, t-\theta).$$

D'altronde essendo

$$\Phi(x, t) = 0,$$

si ha:

$$\Phi(x_0, t_0) = -\int_{(x_0, t_0)}^{(x, t)} [\Phi_\xi(\xi, \vartheta)\,d\xi + \Phi_\theta(\xi, \theta)\,d\theta].$$

Si scelga ora come cammino d'integrazione l'arco di parabola:

(9) $$\xi = x - \lambda (x - x_0) \qquad \theta = t - \lambda^2 (t - t_0) \qquad 0 \leq \lambda \leq 1 .$$

Si perviene allora tenendo conto dell'omogeneità delle Φ_n e della (6) all'espressione

(10) $$\Phi (x_0 , t_0) =$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \Phi_n (x - x_0 , t - t_0) \int_0^1 F^{(n)} [x - \lambda (x - x_0) , t - \lambda^2 (t - t_0)] \lambda^{n-1} d\lambda$$

$$+ \frac{2(t-t_0)}{(n-1)!} \Phi_{n-1} (x - x_0 , t - t_0) \int_0^1 F^{(n+1)} [x - \lambda (x - x_0) , t - \lambda^2 (t - t_0)] \lambda^n d\lambda .$$

Si è quindi provato il seguente

TEOREMA I. – *Sia* F *una soluzione della equazione del calore* (1) *in un insieme aperto* A, *siano* (x_0 , t_0) , (x , t) *due punti di* A *tali che l'arco di parabola* (9) *appartenga ad* A; *vale la formula:*

(11) $$F (x , t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)} (x_0 , t_0) \Phi_k (x - x_0 , t - t_0)$$

$$+ \frac{1}{n!} \tilde{F}^{(n)} (x_0 , t_0 ; x , t) \Phi_n (x - x_0 , t - t_0)$$

$$+ \frac{2}{(n+1)(n-1)!} \tilde{F}^{(n+1)} (x_0 , t_0 ; x , t) (t - t_0) \Phi_{n-1} (x - x_0 , t - t_0) ,$$

avendo posto

(12) $$\tilde{F}^{(n)} (x_0 , t_0 ; x , t) = n \int_0^1 F^{(n)} [x - \lambda (x - x_0) , t - \lambda^2 (t - t_0)] \lambda^{n-1} d\lambda .$$

2. Consideriamo sempre una soluzione F dell'equazione del calore nell'insieme aperto A e passiamo ora allo studio delle linee di livello, che passano per un punto (x_0 , t_0) interno ad A. Esse sono definite dall'equazione in x , t:

(13) $$F (x , t) = F (x_0 , t_0)$$

Senza diminuire la generalità si può porre $x_0 = 0$, $t_0 = 0$ $F (x_0 , t_0) = 0$.

Indicheremo inoltre con $F_0^{(n)}$ il valore $F^{(n)} (0 , 0)$. Consideriamo solamente il caso in cui nel punto $(0 , 0)$ almeno una derivata della F sia diversa da 0 (altrimenti, per l'analiticità di F rispetto ad x, l'asse $t = 0$ diventa linea di livello). Sia $F_0^{(n)}$ la prima derivata diversa da zero.

Sia cioè

(14) $$F_0^{(k)} = 0 \quad \text{per } k < n \quad , \quad F_0^{(n)} \neq 0 .$$

Essendo

$$\tilde{F}^{(n)} (x_0 , t_0 ; x_0 , t_0) = F^{(n)} (x_0 , t_0) ,$$

ed essendo inoltre $\tilde{\tilde{F}}^{(n)}$ una funzione continua essa risulterà diversa da zero in un intorno del punto $(0, 0)$.

Posto

$$\gamma_n(x, t) = \frac{2n}{n+1} \frac{\tilde{\tilde{F}}^{(n+1)}(0, 0; x, t)}{\tilde{\tilde{F}}^{(n)}(0, 0; x, t)}, \tag{15}$$

la γ_n risulta una funzione continua con tutte le derivate in un intorno dell'origine e soddisfa inoltre la:

$$\gamma_n(0, 0) = \frac{2n}{n+1} \frac{F_0^{(n+1)}}{F_0^{(n)}}. \tag{16}$$

Per la (11), l'equazione delle linee di livello in un certo intorno dell'origine assume quindi la forma:

$$\Phi_n(x, t) + \gamma_n(x, t)\, t\Phi_{n-1}(x, t) = 0. \tag{17}$$

Bisogna ora distinguere il caso di n pari da quello di n dispari

I caso: $\quad n = 2m \quad (m = 1, 2, \cdots)$

In questo caso la Φ_n ha la forma:

$$\Phi_{2m} = \prod_{i=1}^{m} (x^2 + \alpha_i^2 t), \quad \text{con } 0 < \alpha_i < \alpha_{i+1} \qquad i = 1, \cdots, m-1 \tag{18}$$

essendo le $\pm \frac{\alpha_i}{2}$ i $2m$ zeri del polinomio H_{2m}. Scegliamo ora $2m$ numeri α_i' e α_i'' che soddisfano le

$$0 < \alpha_i' < \alpha_i < \alpha_i'' \quad \text{per } i = 1, \cdots, m,$$
$$\alpha_i'' < \alpha_{i+1}' \quad \text{per } i = 1, \cdots, m-1.$$

Indichiamo con D_i l'insieme dei punti racchiusi tra le due parabole $x^2 + \alpha_i'^2 t = 0$ e $x^2 + \alpha_i''^2 t = 0$, cioè l'insieme dei punti (x, t) che soddisfano le:

$$-\alpha_i'^2 t + < x^2 < -\alpha_i''^2 t, \qquad (i = 1, \cdots, m) \tag{19}$$

e con C l'insieme chiuso, complemento a $\bigcup_{i=1}^{m} D_i$.

Osserviamo che dato un polinomio omogeneo $\psi(x, t)$ di grado $2m$ il rapporto $\frac{\psi(x, t)}{\Phi_{2m}(x, t)}$ è limitato in C. Infatti questo rapporto dipende solamente da $\frac{x}{\sqrt{|t|}}$ e quindi assume in C gli stessi valori che nell'intersezione di C con l'insieme dei punti che soddisfano la $x^2 + |t| = 1$. Quest'ultimo è un insieme chiuso limitato sul quale il rapporto ψ/Φ_{2m} è una funzione continua in virtù delle (18) e (19) e quindi limitata.

Ricordiamo ora che la Φ_{2m-1} è un polinomio dispari in x e quindi della forma:

$$\Phi_{2m-1}(x, t) = x\varphi_{2(m-1)}(x, t),$$

con $\varphi_{2(m-1)}(x, t)$ polinomio omogeneo di grado $2(m-1)$. In C la (17) si può quindi scrivere nella forma:

$$\Phi_{2m}(x, t) \left\{ 1 + \gamma_{2m}(x, t)\, x \frac{t\varphi_{2(m-1)}(x,t)}{\Phi_{2m}(x, t)} \right\} = 0 . \tag{20}$$

La frazione che compare nella (20) è della forma sopra menzionata, quindi limitata in C. Scegliendo x sufficientemente piccolo tutta la parentesi risulterà quindi positiva. Si ha come risultato: nella intersezione di C con un intorno sufficientemente piccolo dell'origine il primo membro della (17) assume lo stesso segno della $\Phi_{2m}(x, t)$.

Ciò implica anzitutto che per $t > 0$ la (17) non possiede soluzioni in un intorno dell'origine e che le eventuali linee di livello passano quindi tutte sotto l'asse x. Inoltre siccome sulle due parabole che delimitano D_i la Φ_{2m} è di segno contrario, per ogni t negativo ed in valore assoluto sufficientemente piccolo esiste in corrispondenza almeno una $x = f_i(t)$ soluzione della (17), e tale che $\alpha_i' \sqrt{-t} < f_i(t) < \alpha_i'' \sqrt{-t}$ ed esiste una $x = f_{-i}(t)$ che soddisfa la $-\alpha_i'' \sqrt{-t} < f_{-i}(t) \leq -\alpha_i' \sqrt{-t}$. Quindi per ogni t negativo ed in valore assoluto sufficientemente piccolo la (17) ha almeno $2m$ soluzioni. D'altronde in un intorno dell'origine sufficientemente piccolo è $F^{(2m)}(x, t) \neq 0$, ed in esso per ogno t la (17) non può avere più di $2m$ soluzioni, altrimenti per il teorema della media vi sarebbe un punto (ξ, t) tale che $F^{(2m)}(\xi, t) = 0$. Scrivendo la (20) nella forma

$$x^2 + \alpha_i^2 t = -\gamma_{2m}(x, t)\, xt \frac{\varphi_{2(m-1)}(x, t)}{\prod\limits_{\substack{r=i \\ r \neq 1}}^{m} (x^2 + \alpha_r^2 t)} ,$$

si vede inoltre in virtù della limitazione per le $f_{\pm i}(t)$ che si ha

$$f_{\pm i}(t) = \pm \alpha_i \sqrt{-t} + O(\sqrt{-t^3}) . \tag{21}$$

Si perviene quindi al seguente

TEOREMA II. – *Se una soluzione dell'equazione del calore in un punto (x_0, t_0) interno al campo di definizione ha le derivate parziali rispetto ad x nulle fino a quella di ordine $2m$ esclusa, allora per il punto (x_0, t_0) passano m linee di livello; esse sono tangenti alla retta $t = t_0$ e giacciono nel semipiano $t \leq t_0$; ogni curva di livello è composta di 2 rami che a meno di grandezze dell'ordine $(\sqrt{t_0 - t})^3$ si comportano come i rami delle parabole*

$$x - x_0 = \pm \alpha_i \sqrt{t_0 - t} ,$$

essendo $\pm \frac{\alpha_i}{2}$, $i = 1, \cdots, m$, le radici della equazione $H_{2m}(x) = 0$. Il comportamento locale dipende quindi in prima approssimazione solamente da m e non da altri particolari relativi alla F.

II caso: $\quad n = 2m + 1 \qquad (m = 0, 1, \cdots).$

In questo caso, per il teorema precedente, l'equazione (13) può in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine, possedere al massimo una soluzione per ogni t positivo e $2m+1$ soluzioni per ogni t negativo. Altrimenti per il teorema di Rolle in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine la $F^{(1)}(x,t)=0$ avrebbe almeno una soluzione per ogni t positivo ed almeno $2m+1$ soluzioni per ogni t negativo, ciò che è impossibile dato che $F^{(1)}(x,t)$ soddisfa le ipotesi del teorema precedente.

Poniamo, come sopra

$$\Phi_{2m+1}(x,t) = x\varphi_{2m}(x,t), \tag{22}$$

essendo $\varphi_{2m}(x,t)$ un polinomio omogeneo di grado $2m$.

Si ha in virtù della (7)

$$\varphi_{2m}(0,t) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\Phi_{2m+1}(x,t)\right]_{x=0} = (2m+1)\,\Phi_{2m}(0,t),$$

per cui si ha

$$\Phi_{2m}(x,t) = \frac{1}{2m+1}\varphi_{2m}(x,t) + x^2\psi_{2(m-1)}(x,t), \tag{23}$$

con $\psi_{2(m-1)}(x,t)$ polinomio omogeneo di grado $2(m-1)$. Il polinomio φ_{2m} si può inoltre scrivere nella forma:

$$\varphi_{2m}(x,t) = \prod_{i=1}^{m}(x^2+\alpha_i^2 t) \qquad \text{con} \quad 0<\alpha_i<\alpha_{i+1}, \tag{24}$$

essendo ora $\pm\frac{\alpha_i}{2}$ i $2m$ zeri diversi da zero del polinomio H_{2m+1}.

Infine indichiamo con β e $\varepsilon(x,t)$ le espressioni

$$\beta = \frac{1}{2m+1}\gamma_{2m+1}(0,0) = \frac{1}{m+1}\frac{F_0^{(2m+2)}}{F_0^{(2m+1)}} \tag{25}$$

$$\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2m+1}\left[\gamma_{2m+1}(x,t) - \gamma_{2m+1}(0,0)\right]. \tag{26}$$

Si ha ovviamente $\varepsilon(x,t) = o(|x|+|t|)$.

La (17) può ora scriversi nella forma

$$[x+\beta t + t\varepsilon(x,t)]\,\varphi_{2m}(x,t) + \gamma_{2m+1}(x,t)\,x^2 t\psi_{2(m-1)}(x,t). \tag{27}$$

Fissiamo ora dei numeri α_i' e α_i'' come nel caso precedente e definiamo analogamente D_i e C. Fissiamo inoltre due numeri $\beta'<\beta<\beta''$ e indichiamo con D_0 la regione tra le due rette $x+\beta' t=0$ e $x+\beta'' t=0$ che contiene la retta $x+\beta t=0$, cioè l'insieme dei punti (x,t) che soddisfano la relazione

$$-\beta' < \frac{x}{t} < -\beta''. \tag{28}$$

Si osservi che, in un certo intorno dell'origine, D_0 non ha punti comuni con le D_i. Sia C_0 l'insieme chiuso complementare a D_0 ed E l'intersezione di C con C_0.

Scriviamo ora la (27) nella forma

$$(29)\quad (x+\beta t)\,\varphi_{2m}(x,t)\left[1+\varepsilon(x,t)\frac{t}{x+\beta t}+\gamma_{2m+1}(x,t)\,x\frac{x}{x+\beta t}\,\frac{t\psi_{2(m-1)}(x,t)}{\varphi_{2m}(x,t)}\right]=0$$

Come nel caso precedente si dimostra che $\frac{t\psi_{2(m-1)}}{\varphi_{2m}}$ è limitata in C e $\frac{x}{x+\beta t}$ come $\frac{t}{x+\beta t}$ sono limitate in C_0. Si può quindi trovare un intorno I dell'origine tale che la parentesi nella (29) sia positiva nella intersezione di I con E e che inoltre l'intersezione di I con D_0 non abbia punti comuni con le D_i. Nell'intersezione di E con I il pimo membro della (27) assume lo stesso segno del prodotto $(x+\beta t)\ \varphi_{2m}\ (x\,,t)$. Quest'ultimo assume segno alternato sui bordi delle regioni D_i $(i=0\,,1\,,\cdots m)$. La (27) possiede quindi anzitutto per ogni t negativo e sufficientemente piccolo $2\,m$ soluzioni analoghe a quelle considerate nel caso precedente. Essa possiede inoltre una soluzione $x=f_0(t)$ in D_0 per t sufficientemente piccolo. Queste soluzioni sono uniche in virtù di ciò che si è detto all'inizio.

Come nel caso precedente si dimostra che la $f_{\pm i}(t)$ soddisfano le (21) mentre per la $f_0(t)$ si ha una analoga relazione:

$$(30)\qquad f_0(t)=-\beta t+o(t^2)\,.$$

Si perviene così al seguente

TEOREMA III. – *Se una soluzione dell'equazione del calore in un punto* $(x_0\,,t_0)$ *interno al campo di definizione ha le derivate parziali rispetto ad* x *nulle fino a quella, esclusa, di ordine* $2\,m+1$ *allora per il punto* $(x_0\,,t_0)$ *passano* $m+1$ *linee di livello; m di queste sono tangenti all'asse* $t=t_0$ *ed hanno le proprietà enunciate nel teorema II essendo in questo caso le* $\frac{\alpha_i}{2}$ *le radici positive dell'equazione* $H_{2m+1}(x)=0$; *l'ulteriore linea di livello attraversa la retta* $t=t_0$ *e nell'intorno di* $(x_0\,,t_0)$ *si comporta, a meno di grandezze dell'ordine di* $(t-t_0)^2$, *come la retta:*

$$x-x_0=-\frac{1}{m+1}\,\frac{F_0^{(2m+2)}}{F_0^{(2m+1)}}\,(t-t_0)\,.$$

In questo caso questa linea anche in prima approssimazione dipende da F, mentre il comportamento locale delle rimanenti in prima approssimazione è indipendente da F.

Si può ancora aggiungere che dalle dimostrazioni risulta che le linee di livello (che non sono della forma $t=t_0$) sempre separano regioni in cui la $F(x\,,y)-F(x_0\,,y_0)$ cambia di segno.