Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Ghizzetti

Sulle formule di quadratura relative ad intervalli illimitati. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.4, p. 467–470.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_4_467_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulle formule di quadratura relative ad intervalli illimitati.* Nota II di ALDO GHIZZETTI, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

4. OSSERVAZIONI SULLE IPOTESI FATTE. – Se si esaminano gli enunciati dei teoremi I e II del numero precedente, è ben evidente che le ipotesi $ug \in \mathrm{I}$, $y_i g \in \mathrm{I}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ sono indispensabili. È però facile vedere che esse non sono in generale sufficienti ad assicurare che esista finito il limite per $x \to +\infty$ della funzione $\varphi(x)$ definita da (2,3). Valga in proposito il seguente esempio:

$$(4,1) \qquad a = 1\,, \mathrm{E} = \frac{d}{dx}\,,\ \mathrm{E}^* = -\frac{d}{dx}\,[\text{e quindi } y_1 = z_1 = 1\,, \varphi = uv]\,,$$

$$u = \begin{cases} n^{18}(x-n)^2(n+n^{-4}-x)^2 & (\text{per } n \le x \le n+n^{-4}\ ;\ n = 1, 2, \cdots), \\ 0 & (\text{altrove}) \end{cases}$$

$$g = \frac{1}{x^2}\,.$$

Le u, g verificano in $(1, +\infty)$ le ipotesi dette nel teorema I del n. precedente; si ha pure $y_1 g = \frac{1}{x^2} \in \mathrm{I}$ ed anche $ug \in \mathrm{I}$ perché

$$0 \le \int_1^{+\infty} ug\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{u}{x^2}\,\mathrm{d}x < \int_1^{+\infty} u\,\mathrm{d}x =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{18} \int_n^{n+n^{-4}} (x-n)^2 (n+n^{-4}-x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{30} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

D'altra parte l'integrale generale della $\mathrm{E}^*(v) = \frac{1}{x^2}$ è $v = \frac{1}{x} + c$, cosicché risulta

$$\varphi(x) = uv = \begin{cases} n^{18}(x-n)^2(n+n^{-4}-x)^2\left(\frac{1}{x}+c\right) & (\text{per } n \le x \le n+n^{-4}) \\ 0 & (\text{altrove}) \end{cases}$$

ed in particolare

$$\varphi\left(n + \frac{1}{2}n^{-4}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{n}{1+\frac{1}{2}n^{-5}} + cn^2\right)\,.$$

Le due ultime formule mostrano che, qualunque sia c, la $\varphi(x)$ non ha limite determinato per $x \to +\infty$.

(*) Nella seduta del 10 marzo 1962.

Abbiamo perciò adottato le tre ipotesi $ug \in \mathrm{I}$, $y_i g \in \mathrm{I}$, $z_i\,\mathrm{E}(u) \in \mathrm{I}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ che sembrano essenziali per ottenere il teorema I del n. 2. Vi è ancora da osservare che la $ug \in \mathrm{I}$ è in generale indipendente dalle altre due, come prova il seguente esempio. Ferme restando le (4,1), si assuma:

$$u = \begin{cases} (2n - 1)^{-1/4}(x - 2n + 1)(2n - x) & (\text{per } 2n - 1 \leq x \leq 2n), \\ 0 & (\text{per } 2n \leq x \leq 2n + 1), \end{cases}$$

$$g = (-1)^{n-1}\, n^{-1/4} \qquad (\text{per } n \leq x \leq n + 1),$$

$$(n = 1, 2, \cdots).$$

Sono verificate le solite ipotesi qualitative e le condizioni $y_1 g = g \in \mathrm{I}$, $z_1\,\mathrm{E}(u) = u' \in \mathrm{I}$, giacché è subito visto che valgono le

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, n^{-1/4}\ , \quad \int_1^{+\infty} u'\,\mathrm{d}x = 0 .$$

D'altra parte si ha

$$ug = \begin{cases} (2n - 1)^{-1/2}(x - 2n + 1)(2n - x) & (\text{per } 2n - 1 \leq x \leq 2n), \\ 0 & (\text{per } 2n \leq x \leq 2n + 1). \end{cases}$$

e quindi

$$\int_1^{+\infty} ug\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty} (2n - 1)^{-1/2} = +\infty .$$

Vi è infine da osservare che le ipotesi $y_i g \in \mathrm{I}$, $z_i\,\mathrm{E}(u) \in \mathrm{I}$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ si possono anche porre sotto un'altra forma. In virtù della (1,3) e delle $\mathrm{E}(y_i) = 0$, $\mathrm{E}^*(z_i) = 0$ si può scrivere

$$y_i\,\mathrm{E}^*(v) = -\frac{d}{dx}\sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)}\,\mathrm{E}^*_{n-h-1}(v)\ , \quad z_i\,\mathrm{E}(u) = \frac{d}{dx}\sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)}\,\mathrm{E}^*_{n-h-1}(z_i)$$

e perciò, posto $\mathrm{E}^*(v) = g$, le due predette ipotesi equivalgono alle seguenti: devono esistere finiti i seguenti limiti

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)}\,\mathrm{E}^*_{n-h-1}(v) \tag{4,2}$$ [qualunque sia l'integrale v della $\mathrm{E}^*(v) = g$],

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)}\,\mathrm{E}^*_{n-h-1}(z_i). \tag{4,3}$$

5. FORMULA DI QUADRATURA SULL'INTERVALLO $(-\infty, +\infty)$. – In questo numero scrivendo $\alpha(x) \in \mathrm{I}$ [oppure $\alpha(x) \in \mathrm{L}$], intenderemo esprimere che l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(x)\,\mathrm{d}x$ è convergente [1] (oppure assolutamente convergente).

(1) Nel senso che lo sono separatamente i due integrali $\int_{-\infty}^{0} \cdots, \int_{0}^{+\infty} \cdots$

Con eonsiderazioni del tutto analoghe a quelle esposte nei n. 1, 2, 3, si arriva ai due teoremi seguenti:

I. – *Fissati gli operatori differenziali lineari* E, E* *di ordine* n *(adottando le notazioni del n. 1); i punti* $x_1, x_2, \cdots, x_m$ *tali da aversi*

$$-\infty = x_0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leq x_{m+1} = +\infty; \tag{5,1}$$

gli integrali $v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}$ *dell'equazione differenziale* $\mathrm{E}^*(v) = g$, *con* $g(x)$ *localmente sommabile, consideriamo in* $(-\infty, +\infty)$, *assieme alla* $g(x)$, *un'altra funzione* $u(x)$ *dotata di derivata* $(n-1)$*-esima assolutamente continua. Se queste due funzioni verificano le ipotesi*

$$ug \in \mathrm{I} \quad , \quad y_i g \in \mathrm{I} \quad , \quad z_i \mathrm{E}(u) \in \mathrm{I} \tag{5,2}$$

$$[\textit{oppure } y_i g \in \mathrm{L} \quad , \quad z_i \mathrm{E}(u) \in \mathrm{L}]$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} ug\, \mathrm{d}x$ *risulta convergente [oppure assolutamente convergente] e sussiste per esso la seguente formula di quadratura*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ug\, \mathrm{d}x = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{A}_{hi}\, u^{(h)}(x_i) + \mathrm{R} \tag{5,3}$$

con

$$\mathrm{A}_{hi} = [\mathrm{E}^*_{n-h-1}(v_i - v_{i-1})]_{x=x_i}, \tag{5,4}$$

$$\mathrm{R} = \sum_{i=0}^{m} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i\, \mathrm{E}(u)\, \mathrm{d}x, \tag{5,5}$$

ove v_0 *denota quell'integrale della* $\mathrm{E}^*(v) = g$ *che è individuato dalle condizioni iniziali nulle nel punto* $x = -\infty$, *vale a dire che è espresso da*

$$v_0(x) = -\sum_{i=1}^{n} z_i(x) \int_{-\infty}^{x} y_i(\xi) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi \tag{5,6}$$

e $v_m(x)$ *quello che è individuato dalle condizioni iniziali nulle nel punto* $x = +\infty$, *cioè:*

$$v_m(x) = \sum_{i=1}^{n} z_i(x) \int_{x}^{+\infty} y_i(\xi) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{5,7}$$

La formula di quadratura (5,3) *risulta esatta (cioè con* $\mathrm{R} = 0$*) quando* u *è un integrale dell'equazione differenziale* $\mathrm{E}(u) = 0$.

Se $x_1 = -\infty$ *è inutile la considerazione dell'integrale* v_0 *ed il secondo membro di* (5,3) *va sostituito con*

$$\lim_{x \to -\infty} \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)} \mathrm{E}^*_{n-h-1}(v_1) + \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=2}^{m} \mathrm{A}_{hi}\, u^{(h)}(x_i) + \mathrm{R}.$$

Se $x_m = +\infty$ *è inutile la considerazione dell'integrale* v_m *ed il secondo membro di* (5,3) *va sostituito con*

$$\sum_{h=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{A}_{hi}\, u^{(h)}(x_i) - \lim_{x \to +\infty} \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)} \mathrm{E}^*_{n-h-1}(v_{m-1}) + \mathrm{R}.$$

II. – *Se le funzioni* $u(x)$, $g(x)$ *verificano le ipotesi dette nel teorema I e se sussiste una formula di quadratura del tipo* (5,3), *sotto la condizione che* $\mathrm{E}(u) = 0$ *implichi* $\mathrm{R} = 0$, *allora risultano univocamente determinati* $m - 1$ *integrali* $v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}$ *dell'equazione differenziale* $\mathrm{E}^*(v) = g$ *che, assieme ai due* v_0, v_m *menzionati nel teorema I, permettono di esprimere i coefficienti* A_{hi} *ed il resto* R *nel modo indicato dalle* (5,4) *e* (5,5).

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. GHIZZETTI, *Sulle formule di quadratura*, « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano », vol. XXVI (1954–55).

[2] A. GHIZZETTI, *Sulla convergenza dei procedimenti di calcolo, degli integrali definiti, forniti dalle formule di quadratura*, « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova », vol. XXVI (1956).

[3] A. GHIZZETTI, *Lezioni di Analisi Superiore* (Teoria dell'approssimazione lineare), Cap. VI. Editore Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma 1955–56.