Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Cattaneo

Sulla validità del principio di Mach in relatività generale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.3, p. 346–352.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_3_346_0¿

Fisica matematica. — *Sulla validità del principio di Mach in relatività generale.* Nota di CARLO CATTANEO, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

Come H. Thirring ha mostrato fin dal 1918 (cfr. [13], [14]), se uno spazio–tempo piatto M_4 viene perturbato da un tenue strato sferico di materia in rotazione uniforme rispetto a un riferimento galileiano S_G, all'interno dello strato si stabilisce un campo gravitazionale qualitativamente simile al campo « apparente » che è presente classicamente in un riferimento rotante. Quantitativamente tale campo risulta dipendere, oltre che dalla velocità di rotazione dello strato, anche dalla sua massa e dal suo raggio. Il risultato, ottenuto sulla base delle equazioni gravitazionali nella loro approssimazione lineare, è a buon diritto considerato molto importante da un punto di vista speculativo, ravvisandosi in esso una prova della realizzazione, in relatività generale, del principio di Mach, secondo il quale anche l'inerzia, come la gravitazione, è determinata dalle masse dell'universo.

Pienamente concorde sull'importanza e sul significato del teorema di Thirring, vorrei mostrare come ad analoga, ma ancor più netta conclusione concettuale si possa giungere impostando la questione in pieno rigore e in senso più strettamente aderente alla teoria einsteiniana.

1. PREMESSE. – Riferiamo localmente la varietà spazio–temporale V_4, sulla cui struttura non poniamo per il momento alcuna limitazione, a un arbitrario sistema (x^i) (1) di coordinate fisicamente ammissibili, le (x^α) essendo coordinate spaziali e $x^4 = ct$ coordinata temporale. La metrica di V_4, $ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$, abbia segnatura $+++-$, ciò che assieme al predetto carattere delle x^i implica $g_{44} < 0$, $g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta > 0$ (per dx^α non tutte nulle). Al sistema coordinato (x^i) corrisponde un ben determinato *riferimento fisico* S, individuabile mediante il campo dei vettori unitari $\boldsymbol{\gamma}(x)$ tangenti alle linee x^4 (e orientati nel futuro), di componenti $\gamma^\alpha = 0$, $\gamma^4 = 1/\sqrt{-g_{44}}$; $\gamma_i = g_{i4}/\sqrt{-g_{44}}$. Le coordinate x^i, a loro volta, diconsi *adattate* al riferimento S. Esistono infiniti sistemi coordinati adattati a uno stesso riferimento fisico S, legati dal gruppo delle trasformazioni *interne*

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, x^3) \quad , \quad x^{4'} = x^{4'}(x^1, x^2, x^3, x^4), \tag{1}$$

che non mutano il riferimento fisico.

Lo spazio vettoriale T_x tangente a V_4 nel generico punto x può decomporsi nella somma diretta di uno spazio unidimensionale Θ_x parallelo a $\boldsymbol{\gamma}$ e dello spazio supplementare Σ_x, a tre dimensioni, ad esso ortogonale (*tempo e*

(*) Nella seduta del 10 marzo 1962.

(1) Conveniamo che gli indici latini varino da 1 a 4, gli indici greci da 1 a 3.

spazio localmente associati). Una tecnica di proiezione naturale di vettori e tensori su Θ e su Σ, ampiamente sviluppata in precedenti lavori (cfr. [1], [2], [3], [4]), consente di definire grandezze fisiche ed operazioni differenziali *relative* al riferimento fisico S, con carattere invariantivo di fronte al gruppo (1). Con esse si è potuto giungere a una sistematica e corretta formulazione relativa delle leggi fisiche in relatività generale. Senza entrare in lunghi richiami, ci limiteremo qui a ricordare alcuni punti, essenziali per il seguito.

A) I caratteri intrinseci di un riferimento fisico si compendiano nei tre tensori *spaziali* (cioè appartenenti a Σ)

$$C_i = \gamma^r \nabla_r \gamma_i \quad , \quad \tilde{K}_{ij} = \gamma^4 \partial_4 \gamma_{ij} \quad , \quad \tilde{\Omega}_{ij} = \gamma_4 \left(\tilde{\partial}_i \frac{\gamma_j}{\gamma_4} - \tilde{\partial}_j \frac{\gamma_i}{\gamma_4} \right)$$

$$(\tilde{\partial}_i \equiv \partial_i + \gamma_i \gamma^4 \partial_4 , \quad \textit{derivazione trasversa}).$$

C_i non è che il vettore di curvatura delle linee x^4. Il tensore simmetrico $\tilde{K}_{ij}$, legato al modo di variare del tensore metrico spaziale ($\gamma_{ij} = g_{ij} + \gamma_i \gamma_j$) dà la *velocità di deformazione* del fluido di riferimento. Il tensore $\tilde{\Omega}_{ij}$ infine, antisimmetrico, è legato al moto rotatorio locale del fluido e ha il nome di *tensore vortice spaziale*. L'annullarsi di $\tilde{K}_{ij}$ caratterizza i riferimenti *rigidi* (secondo la definizione di Born); l'annullarsi di $\tilde{\Omega}_{ij}$ è proprio dei riferimenti *irrotazionali* ed implica il carattere *normale* della congruenza delle linee x^4.

B) Le proiezioni naturali del tensore di curvatura di V_4, di cui soltanto 9 non nulle, si riducono sostanzialmente alle tre seguenti (cfr. [9])

$$(2) \qquad \mathcal{P}_{\Theta\Sigma\Theta\Sigma}(R_{ijlm}) = \gamma_i \gamma_l \Big[-\frac{1}{2} \gamma^4 \partial_4 (\tilde{K}_{mj} + \tilde{\Omega}_{mj}) + \frac{1}{4} (\tilde{K}_m{}^r + \tilde{\Omega}_m{}^r)(\tilde{K}_{jr} + \tilde{\Omega}_{jr}) + C_j C_m + \tilde{\nabla}_m C_j \Big]$$

$$(3) \qquad \mathcal{P}_{\Theta\Sigma\Sigma\Sigma}(R_{ijlm}) = -\gamma_i \Big[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}_m (\tilde{K}_{lj} + \tilde{\Omega}_{lj}) - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}_l (\tilde{K}_{mj} + \tilde{\Omega}_{mj}) + C_j \tilde{\Omega}_{lm} \Big]$$

$$(4) \qquad \mathcal{P}_{\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma}(R_{ijlm}) = \tilde{R}_{ijlm} + \frac{1}{4} (\tilde{K}_{li} + \tilde{\Omega}_{li})(\tilde{K}_{mj} + \tilde{\Omega}_{mj}) - \frac{1}{4} (\tilde{K}_{mi} + \tilde{\Omega}_{mi}) \cdot (\tilde{K}_{lj} + \tilde{\Omega}_{lj}) + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_{ij} \tilde{\Omega}_{lm} ,$$

le altre 6 riconducendosi immediatamente ad esse. In tali proiezioni compaiono esplicitamente i caratteri intrinseci del riferimento, eventualmente assoggettati all'operazione di derivazione covariante trasversa $\tilde{\nabla}_i$ (cfr. [4], p. 371), oltre al *tensore di curvatura spaziale* $\tilde{R}_{ijlm}$

$$(5) \qquad \tilde{R}_{ijlm} = \frac{1}{2} [\tilde{\partial}_{lj} \gamma_{im} - \tilde{\partial}_{li} \gamma_{mj} - \tilde{\partial}_{mj} \gamma_{li} + \tilde{\partial}_{mi} \gamma_{lj}] - \gamma^{ht} [(\widetilde{mj, h})(\widetilde{li, t}) + (\widetilde{lj, h})(\widetilde{mi, t})]$$

nella cui definizione intervengono derivazioni trasverse e simboli di Christoffel spaziali (cfr. [4], p. 371).

Dalle formule precedenti si traggono anche le quattro proiezioni del tensore di Ricci R_{jm} (cfr. [9])

$$\mathcal{P}_{\Sigma\Sigma}(R_{jm}) = \tilde{R}_{jm} + \frac{1}{4}\tilde{K}^i_i(\tilde{K}_{mj} + \tilde{\Omega}_{mj}) - \frac{1}{4}\tilde{K}_{ij}(\tilde{K}_m{}^i + \tilde{\Omega}_m{}^i) + \frac{1}{2}\tilde{\Omega}_{mi}\tilde{\Omega}^i_j - \\ - \frac{1}{2}\gamma^4\partial_4(\tilde{K}_{mj} + \tilde{\Omega}_{mj}) - C_j C_m - \tilde{\nabla}_m C_j \tag{6}$$

$$\mathcal{P}_{\Sigma\Theta}(R_{jm}) = \gamma_m\left[\frac{1}{2}\tilde{\nabla}_j\tilde{K}^i_i - \frac{1}{2}\tilde{\nabla}_i(\tilde{K}_j{}^i + \tilde{\Omega}_j{}^i) - C_i\tilde{\Omega}_j{}^i\right] \tag{7}$$

$$\mathcal{P}_{\Theta\Sigma}(R_{jm}) = \mathcal{P}_{\Sigma\Theta}(R_{mj}) \tag{8}$$

$$\mathcal{P}_{\Theta\Theta}(R_{jm}) = \gamma_j\gamma_m\left[-\frac{1}{2}\gamma^4\partial_4\tilde{K}^i_i + \frac{1}{4}(\tilde{K}^{ir} + \tilde{\Omega}^{ir})(\tilde{K}_{ir} + \tilde{\Omega}_{ir}) + C_i C^i + \tilde{\nabla}_i C^i\right] \tag{9}$$

ove compare il tensore spaziale di Ricci $\tilde{R}_{jm}$, ottenuto da $\tilde{R}_{ijlm}$ per contrazione del primo col terzo indice.

C) Ad ogni riferimento fisico S è associato un *campo gravitazionale standard* rappresentato da un vettore spaziale G_i decomponibile a sua volta in due vettori spaziali G'_i e G''_i così definiti (cfr. [1], p. 336):

a) *Campo gravitazionale di riposo* (*o di trascinamento*):

$$G'_i = \tilde{\partial}_i U + \partial_4 \varphi_i \tag{10}$$

con

$$U \equiv -c^2 \log\sqrt{-g_{44}} \quad , \quad \varphi_i \equiv c^2\frac{\gamma_i}{\gamma_4}.$$

La (10) mette in evidenza la dipendenza di G'_i da un potenziale scalare U e da un potenziale vettore φ_i. La dipendenza di G'_i da U avviene attraverso l'operazione $\tilde{\partial}_i$ (derivazione trasversa).

b) *Campo di Coriolis*:

$$G''_i = c\,\tilde{\Omega}_{ij}\,v^j \tag{11}$$

in cui interviene il precisato tensore vortice spaziale e la velocità standard della particella di prova.

Molti sono i motivi che giustificano l'assunzione del vettore $\mathbf{G} = \mathbf{G}' + \mathbf{G}''$ a rappresentante del campo gravitazionale in un assegnato riferimento, in particolare alcune proprietà, tipicamente newtoniane, che richiameremo tra poco.

Interessante per il seguito è l'applicazione delle (10) (11) ad un riferimento rotante di uno spazio–tempo di Minkowskj. In una regione spaziotemporale piatta si consideri un riferimento S_ω rotante con velocità angolare costante ω rispetto a un riferimento galileiano S_G (cfr. Möller [12] p. 240); in coordinate «cilindriche» r, ϑ, z (che rappresentano le coordinate cilindriche iniziali in S_G di una generica particella di S_ω) il ds^2 pseudoeuclideo di M_4 assume notoriamente la forma

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + dz^2 + 2\,\omega r^2 d\vartheta\, dt - (c^2 - r^2\omega^2)\,dt^2. \tag{12}$$

Se ne deduce

$$\tilde{K}_{ij} = 0 \quad ; \quad \tilde{\Omega}_{12} = \frac{2\,\omega r}{c\left(\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}\right)^3} \quad , \quad \tilde{\Omega}_{23} = \tilde{\Omega}_{31} = 0 \, .$$

In S_ω è pertanto presente, oltre al campo di Coriolis, un campo di riposo analogo al campo centrifugo classico (cui si riduce per piccoli valori di $\omega r/c$):

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & U = -\, c^2 \log \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \quad , \quad \tilde{\Omega}_{12} = \frac{2\,\omega r}{c\left(\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}\right)^3} \quad , \quad \tilde{\Omega}_{23} = \tilde{\Omega}_{31} = 0 \, ; \\ & G'_i \equiv \tilde{\partial}_i U = \frac{\omega^2 r}{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}} \, \delta_{i1} \quad , \quad G''_i = c\, \tilde{\Omega}_{ij}\, v^j \, . \end{aligned} \right.$$

2. FUNZIONI STAZIONARIE ARMONICHE IN UN UNIVERSO STATICO. – Particolarizziamo la struttura locale di V_4 supponendo che entro una certa regione $\mathfrak{D}$ essa abbia carattere *statico*, ciò che comporta, in coordinate adattate a tale carattere, $g_{\alpha 4} \equiv 0$, $\partial_4 g_{ij} \equiv 0$, $\tilde{\partial}_i \equiv \partial_i$, $\tilde{K}_{ij} \equiv 0$, $\tilde{\Omega}_{ij} \equiv 0$. Le ultime condizioni implicano l'esistenza di *sezioni* V_3 normali alle linee x^4, tra loro isometriche, atte a definire ciò che suol dirsi lo *spazio fisico* tridimensionale. Naturalmente nell'ammessa ipotesi di staticità anche le proiezioni dei tensori di curvatura presentano molte semplificazioni, mentre $\tilde{R}_{\alpha\beta\varrho\tau}$ e $\tilde{R}_{\alpha\beta}$ si riducono rispettivamente al tensore di Riemann e al tensore di Ricci della varietà V_3.

Ciò premesso, sia f una funzione stazionaria (cioè indipendente da x^4) definita in $\mathfrak{D}$. Essa può essere pensata sia come una funzione, di tre variabili, definita sulla generica sezione spaziale V_3, sia come una funzione, di quattro variabili, definita in V_4. Comunque venga interpretata, essa ammette un gradiente, grad f, costituente un campo di vettori spaziali. Tale campo può, a sua volta, essere pensato o come un campo di vettori di V_3 o come campo di vettori di V_4. Nella prima accezione esso ammette una divergenza tridimensionale $\operatorname{div} \operatorname{grad} f \equiv g^{\alpha\beta}\, \tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta f$, $\tilde{\nabla}_\alpha$ indicando la derivazione covariante in V_3. Considerato invece come campo di vettori di V_4, grad f ammette una divergenza quadridimensionale, $\operatorname{Div} \operatorname{grad} f \equiv g^{ij}\, \nabla_i \partial_j f$, definita mediante la derivazione covariante in V_4. Le due divergenze definiscono rispettivamente il laplaciano spaziale di f, $\tilde{\Delta} f$, e il suo laplaciano spaziotemporale Δf. È facile sincerarsi che fra le due quantità ora definite intercorre la relazione

$$(14) \qquad \operatorname{Div} \operatorname{grad} f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f + C^i\, \partial_i f$$

sicché esse coincidono soltanto nel caso che il riferimento fisico di staticità sia anche un riferimento geodetico ($C_i \equiv 0$).

Ciò premesso diremo che la funzione stazionaria f è armonica *in senso spazio temporale* in $\mathfrak{D}$ se ivi risulta $\Delta f = 0$; per tale classe di funzioni (generalmente ben distinte dalle funzioni armoniche in senso spaziale ($\tilde{\Delta} f = 0$), stabiliremo ora un teorema di unicità che verrà utilizzato al successivo n. 3.

Siano V_3, V'_3 due sezioni spaziali normali, di equazioni rispettive $x^4 = c$, $x^4 = c'$ ($c < c'$, costanti), w un dominio regolare di V_3, σ la sua frontiera (bidimensionale); w' il dominio di V'_3 corrispondente a w nella traslazione definita dalle linee x^4, σ' la sua frontiera, corrispondente a σ nella stessa traslazione. Sia poi W il dominio a quattro dimensioni generato da w nella sua traslazione da V_3 a V'_3, e Σ la sua superficie laterale, generata, nella traslazione, da σ. La frontiera di W è costituita evidentemente da Σ, w, w'.

Si consideri ora l'identità differenziale quadridimensionale

$$\operatorname{Div}(f \operatorname{grad} f) = f\Delta f + \operatorname{grad}^2 f \tag{15}$$

valida per ogni funzione regolare $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$. Per una funzione armonica in senso spazio–temporale essa si riduce alla forma

$$\operatorname{Div}(f \operatorname{grad} f) = \operatorname{grad}^2 f. \tag{16}$$

Se poi la f è anche stazionaria, integrata la (16) nel dominio W e applicato al primo integrale il teorema di Green, tenendo anche conto che il flusso di $\operatorname{grad} f$ attraverso w e w' è nullo stante il carattere spaziale di $\operatorname{grad} f$, si deduce

$$\int_\Sigma f \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{n} \, d\Sigma = \int_W \operatorname{grad}^2 f \, dW \tag{17}$$

$\boldsymbol{n}$ essendo il versore della normale esterna a Σ. Ne segue che se f è nulla su σ, e quindi su Σ, essa è identicamente nulla in W. Soddisfa a tale condizione la differenza tra due funzioni stazionarie armoniche, in senso spazio–temporale, in W e assumenti i medesimi valori su σ; ne consegue il seguente

TEOREMA DI UNICITÀ: *L'equazione differenziale* $\Delta f = 0$ *non può ammettere due soluzioni stazionarie* $f(x^1, x^2, x^3)$ *assumenti gli stessi valori su* σ. *In particolare se una funzione stazionaria armonica è costante su* σ, *essa è costante in* w.

3. Un criterio sufficiente per l'euclideità di una regione vuota dello spazio–tempo.

– In una regione spazio–temporale statica di V_4 il campo di Coriolis manca del tutto, mentre il campo di riposo si riduce al gradiente ordinario di un potenziale, $U = -c^2 \log \sqrt{-g_{44}}$, indipendente da x^4. Ma vi è di più: come abbiamo dimostrato in un precedente lavoro (cfr. [7]), la U soddisfa ad un'equazione simile all'equazione di Poisson che nelle regioni vuote si riduce alla forma $\Delta U = 0$.

Ciò posto, supponiamo di sapere che $U(x^1, x^2, x^3)$ assume un valore costante su una superficie chiusa σ contenuta in una regione vuota semplicemente connessa dello spazio fisico V_3. Dal teorema di unicità del n. 2 si deduce allora che essa è costante all'interno di σ, ciò che implica in particolare $C_i = -\frac{1}{c^2}\partial_i U = 0$. Se si tien conto di tal circostanza, nonché delle condizioni $\tilde{K}_{ij} = 0$, $\tilde{\Omega}_{ij} = 0$ nell'equazione di campo $\mathcal{S}_{\Sigma\Sigma}(R_{jm}) = 0$ (avendo naturalmente presente la (6)) si ottiene $\tilde{R}_{\alpha\beta} = 0$, cioè l'annullarsi del tensore di curvatura contratto di V_3. Ma per una varietà riemanniana a tre dimensioni l'annullamento del tensore di Ricci implica l'annullamento del tensore di Riemann, $\tilde{R}_{\alpha\beta\varrho\tau}$. Se ne deduce, tenendo ora presenti tutte le proiezioni (2) (3) (4), l'annullamento del tensore di Riemann di V_4. Si ha pertanto il teorema seguente:

Se in una regione vuota semplicemente connessa di uno spazio–tempo statico il potenziale scalare assume uno stesso valore su una superficie chiusa σ di V_3, *racchiudente un volume* w, V_4 *è localmente minkowskiana in tutto il dominio spazio–temporale* W *generato da* w.

4. CAMPO GRAVITAZIONALE ALL'INTERNO DI UNO STRATO SFERICO RIGIDO. – Consideriamo uno spaziotempo stazionario e spazialmente sferico, generato da un guscio sferico rigido di materia. La varietà V_4 resta divisa in tre parti, una direttamente generata dal guscio e retta dalle equazioni «interne» di campo; una parte esterna, avente la struttura di uno spaziotempo esterno di Schwarzschild; e infine una parte interna, ancora retta dalle equazioni gravitazionali del vuoto. Sulle frontiere di separazione vigono le condizioni di raccordo di Lichnerowicz (cfr. [10]). Pur lasciando imprecisata la natura fisica dello strato materiale e le sue dimensioni, basta l'ammessa condizione di stazionarietà (che del resto nelle regioni vuote potrebbe anche desumersi da un teorema di Birkoff) per assicurare che la regione interna allo strato ha struttura minkowskiana. Per riconoscerlo si osservi che mentre da un lato la regione in questione è certamente statica (come ogni spazio–tempo stazionario spazialmente sferico), il potenziale gravitazionale scalare U è ivi stazionario e assume certamente uno stesso valore sul bordo interno del guscio. Sussistendo nella cavità in esame tutte le condizioni di validità del teorema del n. 3, la regione di V_4 generata dalla cavità medesima è una porzione di spazio–tempo di Minkowkj.

Il risultato estende alla relatività il classico teorema di assenza di campo newtoniano all'interno di un guscio geometricamente e materialmente sferico. Ma ciò che a noi importa soprattutto è che in questa regione minkowskiana, a differenza di ciò che accade in uno spazio–tempo di Minkowskj completamente vuoto, i riferimenti galileiani sono *fisicamente reperibili*, dovendo essere in quiete, o in moto traslatorio uniforme, rispetto alla materia costituente lo strato. E se, adottando un riferimento rotante S_ω si vedono nascere i campi gravitazionali (13), l'origine di tali campi deve essere ricercata nello speciale movimento di S_ω rispetto alla materia presente nell'universo. Se poi si osserva che nel riferimento S_ω, in cui il campo gravitazionale è rigorosamente conosciuto (cfr. ancora la [13]) lo strato di materia appare muoversi con velocità angolare uniforme, il problema di Thirring, di determinare il campo gravitazionale all'interno di uno strato sferico rotante è risoluto rigorosamente.

L'esempio trattato nella presente Nota sembra mostrare in modo netto e rigoroso la validità del principio di Mach in relatività generale. È significativo e anche molto soddisfacente da un punto di vista sperimentale (alla scala effettivamente accessibile alla nostra osservazione) che quando dalla trattazione approssimata di Thirring si passa alla trattazione rigorosa scompaia ogni dipendenza del campo gravitazionale presente in S_ω, dal raggio e dalla massa del guscio. Viene in pari tempo a mancare di fondamento una relazione tra la costante gravitazionale e il raggio e la massa dell'universo che un po' affrettatamente si era creduto di poter desumere dai suddetti risultati approssimati.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

[1] [2] [3] [4] [5] [6] [7] [8] C. CATTANEO, « Il Nuovo Cimento », *10* (1958); *11* (1959); *13* (1959); « Annali di Matematica », XLVIII (1959); « Rend. Accad. Lincei », XXVII, fascicoli 1–2 (1959); « Rendiconti di matematica », *20* (1–2) (1961); « Comptes rendus de l'Acad. des Sc. », *252* (1961); *253* (1961).

[9] I. CATTANEO–GASPARINI, « Comptes rendus de l'Acad. des Sc. », *252* (1961).

[10] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris 1955.

[11] E. MACH, *Die Mechanik*, F. A. Brockhaus, Leipzig 1901.

[12] C. MÖLLER, *The theory of relativity*, Oxford, Clarendon press. 1952.

[13] [14] H. THIRRING, « Phys. ZS. », *19*, 33 (1918); *22*, 29 (1921).