Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Yoshie Katsurada

Varietà $\{H, K\}$ di Del Pezzo-Segre attaccate ad una M_n differenziabile e loro trasformazioni infinitesime.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.3, p. 335–345.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_3_335_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Geometria. — *Varietà* $\{$H , K$\}$ *di Del Pezzo-Segre attaccate ad una* M_n *differenziabile e loro trasformazioni infinitesime.* Nota di YOSHIE KATSURADA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

INTRODUZIONE. – Le varietà algebriche $\{H, K\}$ di Del Pezzo-Segre sono state recentemente utilizzate per la prima volta da B. Segre ([1], [2], [3], pp. 109, 131, 136) nello studio di problemi in grande. Il presente lavoro tratta delle varietà $\{H, K\}$ attaccate ad una M_n differenziabile e del loro comportamento di fronte ad una trasformazione infinitesima di M_n. Compito ulteriore sarà poi quello dello studio degli invarianti di una siffatta varietà $\{H, K\}$ relativi ad un punto singolare delle traiettorie del gruppo definito dalla trasformazione infinitesima dello spazio base.

Il § 1 richiama alcune proprietà delle quantità relative alla varietà algebrica $\{H, K\}$. Il § 2 si riferisce specificamente alla teoria della trasformazione infinitesima della varietà $\{H, K\}$. Il § 3 espone qualche proprietà delle varietà algebriche parallele alla $\{H, K\}$ e della trasformazione infinitesima dello spazio base.

Desidero esprimere i miei ringraziamenti più cordiali al professore B. Segre per il suo aiuto ed i suoi suggerimenti durante il compimento della presente ricerca.

§ 1. QUANTITÀ SU UNA VARIETÀ ALGEBRICA $\{H, K\}$ DI DEL PEZZO-SEGRE. – Sia M_n una varietà differenziabile, la quale abbia dimensione $n \geqq 1$ e sia di classe differenziale C^A. Consideriamo gli elementi differenziali d'ordine α ($\alpha = 1, 2, \cdots, B$; $B \leqq A$) di una curva $x^i = x^i(t)$ sulla varietà M_n. Allora, se sulla M_n si cangiano le coordinate x nelle $\bar{x}$ mediante le formule:

$$\bar{x}^a = \bar{x}^a(x^i) \qquad a, i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.1}$$

gli elementi differenziali curvilinei $\frac{dx^i}{dt}, \frac{d^2x^i}{dt^2}, \cdots, \frac{d^Bx^i}{dt^B}$ vengono trasformati secondo le

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\bar{x}^a}{dt} = \frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} \\ &\frac{d^2\bar{x}^a}{dt^2} = \frac{\partial^2\bar{x}^a}{\partial x^i\partial x^j}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} + \frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{d^2x^i}{dt^2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{d^B\bar{x}^a}{dt^B} = \frac{\partial^B\bar{x}^a}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_B}}\frac{dx^{i_1}}{dt}\cdots\frac{dx^{i_B}}{dt} + \cdots + \frac{\partial\bar{x}^a}{\partial x^i}\frac{d^Bx^i}{dt^B}, \end{aligned}\right. \tag{1.2}$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1962.

con la solita convenzione rispetto agli indici muti i, j, dove il determinante $|\partial \bar{x}^a / \partial x^j|$ non è nullo. Le (1.2), posto $f^{(\beta)} = \frac{d^\beta f}{dt^\beta}$, possono scriversi nella forma:

$$\bar{x}^{(\alpha+1)a} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} X^{\alpha a}_{\beta i} \, x^{(\beta+1)i} \qquad \alpha = 0, 1, \cdots, B-1,$$

dove, tenuto conto della formula di Leibniz per le derivate successive di un prodotto, si ha:

$$(1.3) \qquad X^{\alpha a}_{\beta i} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \qquad \text{se } \alpha = \beta,$$

$$(1.4) \qquad X^{\alpha a}_{\beta i} = 0 \qquad \text{se } \alpha < \beta,$$

$$(1.5) \qquad X^{\alpha a}_{\beta i} = \binom{\alpha}{\beta} \left(\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \right)^{(\alpha-\beta)} \qquad \text{se } \alpha > \beta \text{ ([5], p. 18)}.$$

Chiamasi spazio di elementi lineari d'ordine B una varietà del tipo di quella avente gli $x^{(\alpha)i}$ $(\alpha = 0, 1, \cdots, B)$ per elementi, e la si denoterà con $M_n^{(B)}$; nel caso $A \geqq 1$, B può assumere i valori $1, 2, \cdots, A$.

Chiamasi exvettore, e più precisamente exvettore contravariante di grado G e caratteristica (1, 0, G, B), un ente definito da componenti $v^{\alpha i}$ $(\alpha = 0, 1, \cdots, G)$ che dipendono da un elemento differenziale del B–mo ordine $(x^i, x^{(1)i}, \cdots, x^{(B)i})$, ossia da un punto sulla varietà $M_n^{(B)}$, e che siano soggette alla legge di trasformazione:

$$(1.6) \qquad \bar{v}^{\alpha a} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} X^{\alpha a}_{\beta i} \, v^{\beta i} \qquad \alpha = 0, 1, \cdots, G,$$

coi coefficienti $X^{\alpha a}_{\beta i}$ espressi dalle (1.3), (1.4), (1.5). Si possono anche definire similmente exvettori covarianti ed extensori. Relativamente a queste nozioni introdotte da H. V. Craig [6], e tenuto conto della (1.6), si hanno facilmente le seguenti proprietà:

I) Se v^i è un vettore contravariante, allora $v^{(\alpha)i}$ $(\alpha = 0, \cdots, G)$ è un exvettore contravariante di grado G.

II) Se $v^{\alpha i}$ è un exvettore contravariante di grado G, allora $v^{\beta i}$ – ove $\beta = 0, 1, \cdots, H$ $(< G)$ – risulta un exvettore contravariante di grado H.

Le seguenti proprietà degli extensori furono inoltre ottenute da H. V. Craig.

III) Se T_{ij} è un tensore, allora, per ogni intero M soddisfacente alle $0 \leqq M \leqq B$, $\binom{M}{\alpha\beta} T_{ij}^{(M-\alpha-\beta)} \equiv T_{\alpha i \beta j}$ è un extensore di grado M e caratteristica (0, 2, M, M) ([7], p. 336), dove

$$\binom{M}{\alpha\beta} \begin{cases} = \dfrac{M!}{\alpha!\,\beta!\,(M-\alpha-\beta)!} & \text{se } M \geqq \alpha + \beta \\ = 0 & \text{se } M < \alpha + \beta. \end{cases}$$

IV) Se T^{ij} è un tensore, allora $\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ M\end{bmatrix} T^{ij(\alpha+\beta-M)} = T^{\alpha i \beta j}$ è un extensore di grado M e caratteristica $(2, 0, M, M)$ ([7], p. 335), dove

$$\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ M\end{bmatrix} = \binom{M}{M-\alpha, M-\beta}\binom{M}{\alpha}^{-1}\binom{M}{\beta}^{-1}.$$

V) Se $T^{i_1\cdots i_p}$ è un tensore, allora $\begin{bmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_p\\ M\end{bmatrix} T^{i_1\cdots i_p(\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)M)} \equiv T^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_p i_p}$ è un extensore di grado M e caratteristica $(P, 0, M, M)$ ([7], p. 335), dove

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_p\\ M\end{bmatrix} = \binom{M}{M-\alpha_1, \cdots, M-\alpha_p}\binom{M}{\alpha_1}^{-1}\cdots\binom{M}{\alpha_p}^{-1}$$

$$\binom{M}{\gamma_1, \cdots, \gamma_p} \begin{cases} = \dfrac{M!}{\gamma_1!\cdots\gamma_p!\,(M-\gamma_1-\cdots-\gamma_p)!} & \text{se } M \geqq \gamma_1+\cdots+\gamma_p \\ = 0 & \text{se } M < \gamma_1+\cdots+\gamma_p. \end{cases}$$

VI) Se $T^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1 j_2}$ è un extensore, allora $\begin{Bmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_p\\ M, \beta_1, \beta_2\end{Bmatrix} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1 j_2}{}^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)M-\beta_1-\beta_2)} T \equiv {}^{\alpha_1 i_1\cdots\alpha_p i_p}{}_{\beta_1 j_1\,\beta_2 j_2}$ è un extensore di grado M e caratteristica $(P, 2, M, M)$ ([7], p. 335), dove

$$\begin{Bmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_p\\ M, \beta_1, \beta_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_p\\ M\end{bmatrix}\binom{\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)M}{\beta_1\,\beta_2}.$$

VII) Se T^{i}_{jkl} è un extensore, allora $\binom{\alpha}{\beta\gamma\delta} T^{i\,(\alpha-\beta-\gamma-\delta)}_{jkl} \equiv T^{\alpha i}_{\beta j\,\gamma k\,\delta l}$ $(\alpha = 0, \cdots, G)$ è un extensore di grado G e caratteristica $(1, 3, G, G)$ ([7], p. 335).

Si possono poi definire, in modo simile a quello noto, i differenziali assoluti. Ad esempio, per un exvettore contravariante $v^{\alpha i}$ risulta:

$$\delta v^{\alpha i} = dv^{\alpha i} + \Gamma^{\alpha i}_{\beta j\,\gamma k}\, v^{\beta i}\, dx^{(\gamma)k}, \tag{1.7}$$

dove i simboli $\Gamma^{\alpha i}_{\beta j\,\gamma k}$ siano assoggettati, in forza delle (1.1), (1.2), alla seguente trasformazione: posto $\bar{X}^{\theta i}_{\beta b}\,\dfrac{\partial x^{(\theta)i}}{\partial \bar{x}^{(\beta)b}}$, ed $\bar{X}^{\theta i}_{\beta b\,\gamma c} = \dfrac{\partial^2 x^{(\theta)i}}{\partial \bar{x}^{\beta(b)}\,\partial \bar{x}^{\gamma(c)}}$, si ha

$$\bar{\Gamma}^{\alpha a}_{\beta b\,\gamma c} = \sum_{\theta=\gamma}^{\alpha-\beta}\sum_{\varphi=\beta}^{\alpha-\theta}\sum_{\psi=\theta+\varphi}^{\alpha} \Gamma^{\psi i}_{\varphi j\,\theta k}\, X^{\alpha a}_{\psi i}\, \bar{X}^{\varphi j}_{\beta b}\, \bar{X}^{\theta k}_{\gamma c} + \sum_{\theta=\beta+\gamma}^{\alpha} \bar{X}^{\theta i}_{\beta b\,\gamma c}\, X^{\alpha a}_{\theta i} \tag{1.8}$$

([8], p. 22).

Si possono allora definire exvettori paralleli, mediante la condizione $\delta v^{\alpha i} = 0$.

Supponiamo ora che M_n sia una varietà differenziabile dotata di connessione affine Γ^{i}_{jk}. Ne risulta un campo di connessione affine Γ^{i}_{jk} lungo ogni curva $x^i = x^i(t)$. In una mia precedente Nota [9] vien stabilita la seguente proprietà della connessione affine:

VIII) Se Γ^{i}_{jk} è una connessione affine, allora $\binom{\alpha}{\beta\gamma} \Gamma^{i\,(\alpha-\beta-\gamma)}_{jk} \equiv \overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta i\,\gamma k}$ è una connessione di extensore ([9], p. 18).

Supposto M_n immerso in uno spazio proiettivo di dimensione $\geqq \binom{n+B}{n} - 1$, ad ogni elemento differenziale curvilineo regolare $E_H(x^{(1)i}, \cdots, x^{(H)i})$, d'ordine H e centro P, e per ogni intero K soddisfacente alle

$$0 \leqq H < K \leqq B,$$

si può associare una varietà algebrica $\{H, K\}$ di dimensione $(K-H)n + H$, luogo degli $\infty^{(K-H)(n-1)}$ spazi S_K osculatori in P ai vari E_K (regolari) tracciati su M_n e contenenti E_H: cfr. B. Segre ([1], p. 114; [2], § 50). Questa varietà è fornita dagli elementi differenziali $E_K(\overset{\circ}{x}{}^{(1)i}, \cdots, \overset{\circ}{x}{}^{(H)i}, x^{(H+1)i}, \cdots, x^{(K)i})$, dove $\overset{\circ}{x}{}^{(1)i}, \cdots, \overset{\circ}{x}{}^{(H)i}$ denotano valori fissati e $x^{(H+1)i}, \cdots, x^{(K)i}$ indicano valori arbitrari; dunque, in corrispondenza ai singoli punti di M_n, si può considerare un campo di siffatte varietà algebriche.

Consideriamo da ultimo gli extensori di Craig (III–VII) sulla varietà algebrica $\{H, K\}$. Per III), l'extensore $\binom{K}{\alpha\beta} T_{ij}^{(K-\alpha-\beta)} \equiv T_{\alpha i \beta j}$ testè introdotto dipende dall'elemento differenziale del $(K-\alpha-\beta)$–mo ordine $(x^i, x^{(1)i}, \cdots, x^{(K-\alpha-\beta)i})$; sicché le componenti dell'extensore $T_{\alpha i \beta j}$ sono funzioni dell'elemento differenziale del H–mo ordine: $(\overset{\circ}{x}{}^i, \overset{\circ}{x}{}^{(1)i}, \cdots, \overset{\circ}{x}{}^{(H)i})$ per gli indici α, β soddisfacenti alle $K - H \leqq \alpha + \beta \leqq K$ ed aventi valori fissati, e verranno denotate con $(T_{\alpha i \beta j})_0$, mentre le altre componenti sono funzioni dell'elemento differenziale: $(x^{(H+1)i}, \cdots, x^{(K)i})$ per gli indici α, β soddisfacenti alle $K - H > \alpha + \beta \geqq 0$, e verranno denotate con $T_{\alpha i \beta j} = f(x^{(H+1)l}, \cdots, x^{(K)l})$. Con queste notazioni, si possono stabilire similmente le componenti degli extensori nel modo appresso indicato.

$$\text{IV}')\qquad \begin{cases} (T^{\alpha i \beta j})_0 & \text{se } 0 \leqq \alpha + \beta \leqq H + K \\ T^{\alpha i \beta j} = f(x^{(H+1)l}, \cdots, x^{(K)l}) & \text{se } 2K \geqq \alpha + \beta > H + K \end{cases}$$

per l'extensore $\begin{bmatrix}\alpha\beta\\K\end{bmatrix} T^{ij(\alpha+\beta-K)} \equiv T^{\alpha i \beta j}$,

$$\text{V}')\qquad \begin{cases} (T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_p i_p})_0 & \text{se } (p-1)K \leqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_p \leqq H + (p-1)K \\ T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_p i_p} = f(x^{(H+1)l}, \cdots, x^{(K)l}) & \text{se } pK \geqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_p > H + (p-1)K \end{cases}$$

per l'extensore denotato da V),

$$\text{VI}')\qquad \begin{cases} (T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_p i_p}{}_{\beta_1 j_1 \beta_2 j_2})_0 & \text{se } (p-1)K \leqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_p - \beta_1 - \beta_2 \leqq H + (p-1)K \\ T^{\alpha_1 i_1 \cdots \alpha_p i_p}{}_{\beta_1 j_1 \beta_2 j_2} = f(x^{(H+1)l}, \cdots, x^{(K)l}) & \\ & \text{se } pK \geqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_p - \beta_1 - \beta_2 > H + (p-1)K \end{cases}$$

per l'extensore dato da VI),

$$\text{VII}')\qquad \begin{cases} (T^{\alpha i}{}_{\beta j \gamma k \delta l})_0 & \text{se } 0 \leqq \alpha - \beta - \gamma - \delta \leqq H \\ T^{\alpha i}{}_{\beta j \gamma k \delta l} = f(x^{(H+1)h}, \cdots, x^{(K)h}) & \text{se } K \geqq \alpha - \beta - \gamma - \delta > H \end{cases}$$

per l'extensore dato da VII); abbiamo dunque le componenti costanti

$$(T^{\alpha i}{}_{\beta j \gamma k \delta l})_0 \qquad \text{per } \alpha = 0, 1, \cdots, H.$$

Esprimendo la quantità indicata da VIII sulla varietà algebrica $\{H, K\}$, risulta

$$\text{VIII}')\qquad \begin{cases} (\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta j\, \gamma k})_0 & \text{se } 0 \leqq \alpha-\beta-\gamma \leqq H \\ \overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta j\, \gamma k} = f(x^{(H+1)\,l}, \dots, x^{(K)\,l}) & \text{se } K \geqq \alpha-\beta-\gamma > H, \end{cases}$$

onde otteniamo per $\alpha = 0, \dots, H$ le componenti costanti $(\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta j\, \gamma k})_0$.

§ 2. TRASFORMAZIONE INFINITESIMA DI VARIETÀ ALGEBRICHE $\{H, K\}$. – Supponiamo ora che $M_n^{(B)}$ sia uno spazio di elementi differenziali d'ordine B dotato di trasformazione infinitesima:

$$(2.1)\qquad x'^{(\alpha)\,i} = x^{(\alpha)\,i} + \xi^{\alpha i}(x^j, x^{(1)\,j}, \dots, x^{(B)\,j})\,\delta\tau \qquad \alpha = 0, 1, \dots, B,$$

dove $\xi^{\alpha i}(x^j, x^{(1)\,j}, \dots, x^{(B)\,j})$ è un extensore di grado B e $\delta\tau$ denota un incremento infinitesimo del parametero τ.

TEOREMA 1. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà* $\{H, K\}$ *relativa al punto* $P(x^i)$ *si muti mediante la trasformazione infinitesima* (2.1) *nella varietà* $\{H, K\}'$ *relativa al punto* $P'(x'^i)$ *è che risulti* $\xi^{\alpha i} = \xi^{(\alpha)\,i}$ (e cioè che l'extensore $\xi^{\alpha i}$ sia quello delle derivate di un vettore $\xi^i(x^j)$).

Dimostriamo la necessità della condizione, supponendo che la varietà ottenuta da $\{H, K\}$ mediante (2.1) sia la varietà $\{H, K\}'$ fornita dagli elementi differenziali $E_K'(\underset{0}{x}'^i, \underset{0}{x}'^{(1)\,i}, \dots, \underset{0}{x}'^{(H)\,i}, x'^{(H+1)\,i}, \dots, x'^{(K)\,i})$. Allora:

$$(2.2)\qquad \underset{0}{x}'^{(\alpha)\,i} = \underset{0}{x}^{(\alpha)\,i} + \xi^{\alpha i}(\underset{0}{x}^j, \underset{0}{x}^{(1)\,j}, \dots, \underset{0}{x}^{(H)\,j}, x^{(H+1)\,j}, \dots, x^{(K)\,j})\,\delta\tau$$

per $\alpha = 0, 1, \dots, H$, onde

$$\xi^{\alpha i} = \xi^{\alpha i}(x^j, x^{(1)\,j}, \dots, x^{(H)\,j}) \qquad \alpha = 0, 1, \dots, H:$$

affinché l'espressione (2.2) valga per tutti gli interi K, H soddisfacenti alle

$$0 \leqq H < K \leqq B,$$

occorre che

$$\xi^{\alpha i} = \xi^{\alpha i}(x^j, x^{(1)\,j}, \dots, x^{(\alpha)\,j}) \qquad \alpha = 0, 1, \dots, B-1,$$

cioè

$$(2.3)\qquad \begin{cases} \xi^i = \xi^i(x^j) \\ \xi^{1\,i} = \xi^{1\,i}(x^j\, x^{(1)\,j}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \xi^{Bi} = \xi^{Bi}(x^j, x^{(1)\,j}, \dots, x^{(B)\,j}). \end{cases}$$

Trasportando una curva $C: x^i = x^i(t)$ sulla varietà M_n mediante la trasformazione infinitesima:

$$x'^i = x^i + \xi^i(x^j)\,\delta\tau,$$

otteniamo la curva C':

$$x'^i(t) = x^i(t) + \xi^i(x^j(t))\,\delta\tau,$$

sicché

$$x'^{(\alpha)\,i} = x^{(\alpha)\,i} + \xi^{(\alpha)\,i}\,\delta\tau.$$

Affinché la trasformazione infinitesima (2.1) muti univocamente l'elemento differenziale curvilineo di C in quello di C' dev'essere

$$\underset{\circ}{\xi}^{\alpha i} = \underset{\circ}{\xi}^{(\alpha)\, i} . \tag{2.4}$$

Viceversa, se le (2.1), (2.4) sono soddisfatte, si può osservare che

$$\underset{\circ}{x}'^{(\alpha)\, i} = \underset{\circ}{x}^{(\alpha)\, i} + \xi^{(\alpha)\, i}(\underset{\circ}{x}^{j}, \underset{\circ}{x}^{(1)\, j}, \cdots, \underset{\circ}{x}^{(\alpha)\, j})\, \delta\tau \qquad \alpha = 0, \cdots, \mathrm{H}$$

$$x'^{(\beta)\, i} = x^{(\beta)\, i} + \xi^{(\beta)\, i}(\underset{\circ}{x}^{j}, \cdots, \underset{\circ}{x}^{(\mathrm{H})\, j}, x^{(\mathrm{H}+1)\, j}, \cdots, x^{(\beta)\, j})\, \delta\tau \qquad \beta = \mathrm{H}+1, \cdots, \mathrm{K}$$

per gli elementi differenziali d'ordine K, $\mathrm{E_K}\,(\underset{\circ}{x}^{(1)\, i}, \cdots, \underset{\circ}{x}^{(\mathrm{H})\, i}, x^{(\mathrm{H}+1)\, i}, \cdots, x^{(\mathrm{K})\, i})$, aventi in comune un elemento d'ordine H e centro P. Si vede allora facilmente che gli elementi differenziali $\mathrm{E_K}\,(\underset{\circ}{x}'^{(1)\, i}, \cdots, \underset{\circ}{x}'^{(\mathrm{H})\, i}, x'^{(\mathrm{H}+1)\, i}, \cdots, x'^{(\mathrm{K})\, i})$, aventi in comune l'elemento d'ordine H e centro P' debbono costituire la varietà algebrica $\{\mathrm{H}, \mathrm{K}\}'$.

In una mia vecchia Nota [10] stabilii le seguenti proprietà per la quantità di uno spazio di elementi differenziali d'ordine B, dotato di trasformazione infinitesima:

$$x'^{(\alpha)\, i} = x^{(\alpha)\, i} + \xi^{(\alpha)\, i}(x^{j}, x^{(1)\, j}, \cdots, x^{(\alpha)\, j})\, \delta\tau \qquad \alpha = 0, 1, \cdots, \mathrm{B}. \tag{2.5}$$

Si ha allora per le (1.3), (1.4), (1.5)

$$\frac{\partial x'^{(\alpha)\, i}}{\partial x^{(\beta)\, j}} = \begin{cases} \dbinom{\alpha}{\beta} \left\{ \delta^{i}_{j} + \dfrac{\partial \xi^{i}}{\partial x^{j}}\, \delta\tau \right\}^{(\alpha-\beta)} & \text{se } 0 \leqq \beta \leqq \alpha \\ 0 & \text{se } \beta > \alpha \end{cases}$$

ove δ^{i}_{j} designa il delta di Kronecker.

Se $\psi(x^{i}, x^{(1)\, i}, \cdots, x^{(\mathrm{B})\, i})$ è una quantità in $\mathrm{M}^{(\mathrm{B})}_{n}$, la derivate di Lie: $\mathrm{L}\psi$ è data da

$$\mathrm{D}\psi = \mathrm{L}\psi\, \delta\tau = \psi(x'^{i}, x'^{(1)\, i}, \cdots, x'^{(\mathrm{B})\, i}) - \psi'(x'^{i}, x'^{(1)\, i}, \cdots, x'^{(\mathrm{B})\, i})$$

dove $\psi'(x'^{i}, x'^{(1)\, i}, \cdots, x'^{(\mathrm{B})\, i})$ è l'ente ψ calcolato rispetto alle coordinate x', e risulta:

I° $\quad \mathrm{L}x^{(\alpha)\, i} = 0$ ([10], p. 21),

II° $\quad \mathrm{L}v^{(\alpha)\, i} = (\mathrm{L}v^{i})^{(\alpha)}$ ([10], p. 20),

III° $\quad \mathrm{L}\dbinom{\mathrm{M}}{\alpha} u_{i}^{(\mathrm{M}-\alpha)} = \dbinom{\mathrm{M}}{\alpha} (\mathrm{L}u_{i})^{(\mathrm{M}-\alpha)}$ ([10], p. 21),

IV° $\quad \mathrm{L}\dbinom{\mathrm{M}}{\alpha\beta} \mathrm{T}_{ij}^{(\mathrm{M}-\alpha-\beta)} = \dbinom{\mathrm{M}}{\alpha\beta} (\mathrm{LT}_{ij})^{(\mathrm{M}-\alpha-\beta)}$ ([10], p. 21),

V° $\quad \mathrm{L}\begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \mathrm{M} \end{bmatrix} \mathrm{T}^{ij\,(\alpha+\beta-\mathrm{M})} = \begin{bmatrix} \alpha\beta \\ \mathrm{M} \end{bmatrix} (\mathrm{LT}^{ij})^{(\alpha+\beta-\mathrm{M})}$ ([10], p. 22),

VI° $\quad \mathrm{L}\begin{bmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_p \\ \mathrm{M} \end{bmatrix} \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_p\,(\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)\mathrm{M})} =$

$\quad = \begin{bmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_p \\ \mathrm{M} \end{bmatrix} (\mathrm{LT}^{i_1 \cdots i_p})^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)\mathrm{M})}$ ([10], p. 22),

VII° $\quad \mathrm{L}\begin{Bmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_p \\ \mathrm{M}, \beta_1\beta_2 \end{Bmatrix} \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 j_2}{}^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)\mathrm{M}-\beta_1-\beta_2)} =$

$\quad = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \cdots \alpha_p \\ \mathrm{M}, \beta_1\beta_2 \end{Bmatrix} (\mathrm{LT}^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 j_2})^{(\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)\mathrm{M}-\beta_1-\beta_2)}$ ([10], p. 23), VIII° $L\binom{\alpha}{\beta\gamma\delta} T^{i\ \ (\alpha-\beta-\gamma-\delta)}_{jkl} = \binom{\alpha}{\beta\gamma\delta} (LT^{i}_{jkl})^{(\alpha-\beta-\gamma-\delta)}$ ([10], p. 23),

IX° $L\binom{\alpha}{\beta\gamma} \Gamma^{i\ (\alpha-\beta-\gamma)}_{jk} = \binom{\alpha}{\beta\gamma} (L\Gamma^{i}_{jk})^{(\alpha-\beta-\gamma)}$ ([10], p. 23).

Facendo uso della trasformazione infinitesima (2.5) sia per la varietà algebrica {H , K} che per le derivate di Lie delle quantità sulla varietà algebrica {H , K}, vediamo che

$$\mathrm{II}^{\circ\circ}\quad \begin{cases} (Lv^{(\alpha)\,i})_0 & \text{se } 0 \leqq \alpha \leqq H \\ Lv^{(\alpha)\,i} = f(x^{(H+1)j}, \dots, x^{(K)j}), & \text{se } H+1 \leqq \alpha \leqq K, \end{cases}$$

$$\mathrm{III}^{\circ\circ}\quad \begin{cases} \left(L\binom{K}{\alpha} u_i^{(K-\alpha)}\right)_0 & \text{se } K-H \leqq \alpha \leqq K \\ L\binom{K}{\alpha} u_i^{(K-\alpha)} = f(x^{(H+1)j}, \dots, x^{(K)j}), & \text{se } 0 \leqq \alpha < K-H, \end{cases}$$

$$\mathrm{IV}^{\circ\circ}\quad \begin{cases} \left(L\binom{K}{\alpha\beta} T_{ij}^{(K-\alpha-\beta)}\right)_0 & \text{se } K-H \leqq \alpha+\beta \leqq K \\ L\binom{K}{\alpha\beta} T_{ij}^{(K-\alpha-\beta)} = f(x^{(H+1)j}, \dots, x^{(K)j}), & \text{se } 0 \leqq \alpha+\beta \leqq K-H, \end{cases}$$

$$\mathrm{V}^{\circ\circ}\quad \begin{cases} \left(L\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ K\end{bmatrix} T^{ij\,(\alpha+\beta-K)}\right)_0 & \text{se } 0 \leqq \alpha+\beta \leqq K+H \\ L\begin{bmatrix}\alpha\beta\\ K\end{bmatrix} T^{ij\,(\alpha+\beta-K)} = f(x^{(H+1)\,l}, \dots, x^{(K)\,l}), & \text{se } K+H < \alpha+\beta \leqq 2K, \end{cases}$$

$$\mathrm{VI}^{\circ\circ}\quad \begin{cases} \left(L\begin{bmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_p\\ K\end{bmatrix} T^{i_1\cdots i_p\,(\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)K)}\right)_0 \\ \qquad \text{se } (p-1)K \leqq \alpha_1+\cdots+\alpha_p \leqq (p-1)K+H \\ \left(L\begin{bmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_p\\ K\end{bmatrix} T^{i_1\cdots i_p\,(\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)K)} = f(x^{(H+1)j}, \dots, x^{(K)j})\right) \\ \qquad \text{se } (p-1)K+H < \alpha_1+\cdots+\alpha_p \leqq pK, \end{cases}$$

$$\mathrm{VII}^{\circ\circ}\quad \begin{cases} \left(L\left\{\begin{matrix}\alpha_1\cdots\alpha_p\\ K,\beta_1\beta_2\end{matrix}\right\} T^{i_1\cdots i_p\ \ (\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)K-\beta_1-\beta_2)}_{J_1J_2}\right)_0 \\ \qquad \text{se } (p-1)K \leqq \alpha_1+\cdots+\alpha_p-\beta_1-\beta_2 \leqq (p-1)K+H \\ L\left\{\begin{matrix}\alpha_1\cdots\alpha_p\\ K,\beta_1\beta_2\end{matrix}\right\} T^{i_1\cdots i_p\ \ (\alpha_1+\cdots+\alpha_p-(p-1)K-\beta_1-\beta_2)}_{j_1j_2} = f(x^{(H+1)l}, \dots, x^{(K)\,l}) \\ \qquad \text{se } (p-1)K+H < \alpha_1+\cdots+\alpha_p-\beta_1-\beta_2 \leqq pK, \end{cases}$$

$$\mathrm{VIII}^{\circ\circ}\quad \begin{cases} \left(L\binom{\alpha}{\beta\gamma\delta} T^{i\ \ (\alpha-\beta-\gamma-\delta)}_{jkl}\right)_0 & \text{se } 0 \leqq \alpha-\beta-\gamma-\delta \leqq H \\ L\binom{\alpha}{\beta\gamma\delta} T^{i\ \ (\alpha-\beta-\gamma-\delta)}_{jkl} = f(x^{(H+1)\,h}, \dots, x^{(K)\,h}) & \text{se } H < \alpha-\beta-\gamma-\delta \leqq K, \end{cases}$$

$$\mathrm{IX}^{\circ\circ}\quad \begin{cases} \left(L\binom{\alpha}{\beta\gamma} \Gamma^{i\,(\alpha-\beta-\gamma)}_{jk}\right)_0 & \text{se } 0 \leqq \alpha-\beta-\gamma \leqq H \\ L\binom{\alpha}{\beta\gamma} \Gamma^{i\ (\alpha-\beta-\gamma)} = f(x^{(H+1)h}, \dots, x^{(K)\,h}) & \text{se } H < \alpha-\beta-\gamma \leqq K, \end{cases}$$

§ 3. ALCUNE PROPRIETÀ DELLE VARIETÀ PARALLELE ALLA $\{H, K\}$ RELATIVE ALLA TRASFORMAZIONE INFINITESIMA. – Con riferimento ad una varietà differenziabile M_n dotata di connessione affine Γ^i_{jk}, ho precedentemente ([11]) introdotto la nozione di varietà algebrica parallela alla $\{H, K\}$. Precisamente, siano $P(x)$, $\tilde{P}(x+dx)$ punti infinitamente vicini di M_n e $\{H, K\}$ e $\{H \widetilde{,} K\}$ le varietà algebriche fornite rispettivamente dagli elementi differenziali $E_K(\underset{\circ}{x}^{(1)i}, \cdots, \underset{\circ}{x}^{(H)i}, x^{(H+1)i}, \cdots, x^{(K)i})$ di centro P e $\tilde{E}_K(\underset{\circ}{\tilde{x}}^{(1)i}, \cdots, \underset{\circ}{\tilde{x}}^{(H)i}, \cdots, \tilde{x}^{(H+1)i}, \cdots, \tilde{x}^{(K)i})$ di centro $\tilde{P}$. Se $\{H \widetilde{,} K\}$ è la varietà algebrica parallela alla $\{H, K\}$, allora fra i rispettivi elementi differenziali abbiamo le seguenti relazioni

$$\underset{\circ}{\tilde{x}}^{(\alpha+1)i} = \underset{\circ}{x}^{(\alpha+1)i} - (\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta j \gamma k})_0 \, \underset{\circ}{x}^{(\beta+1)j} d\underset{\circ}{x}^{(\gamma)k} \qquad \alpha = 0, 1, \cdots, H-1, \tag{3.1}$$

$$\tilde{x}^{(\varphi+1)i} = x^{(\varphi+1)i} - (\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta j \gamma x} \, x^{(\beta+1)j} dx^{(\gamma)k} \qquad \varphi = H, \cdots, K-1, \tag{3.2}$$

ove si assuma $dx^{(\gamma)k} = \tilde{x}^{(\gamma)k} - x^{(\gamma)k}$. Si può osservare che, per la VIII'), gli elementi differenziali $\tilde{E}_H(\underset{\circ}{\tilde{x}}^{(1)i}, \cdots, \underset{\circ}{\tilde{x}}^{(H)i})$ sono dipendenti soltanto dalle $(x, dx, \underset{\circ}{x}^{(1)i}, \cdots, \underset{\circ}{x}^{(H)i})$.

Siano y^I coordinate lineari di punto dello spazio proiettivo d'immersione della M_n. Allora possiamo esprimere lo spazio S_K osculatore in P ad un qualunque elemento differenziale, E_K, tracciato su M_n e contenente E_H colle formole:

$$Y^I = \underset{\circ}{y}^I + \underset{\circ}{\lambda} \underset{\circ}{y}^{(1)I} + \cdots + \underset{H-1}{\lambda} \underset{\circ}{y}^{(H)I} + \underset{H}{\lambda} \underset{\circ}{y}^{(H+1)I} + \cdots + \underset{K-1}{\lambda} \underset{\circ}{y}^{(K)I}, \tag{3.3}$$

onde, se $H = 0$, il punto Y dello spazio S_K è un ente denominato polinomio differenziale da B. Segre ([2], §§ 62–67; [4], p. 272). Per $y^{(\alpha)I}$ abbiamo quindi che

$$y^{(1)I} = \frac{\partial y^I}{\partial x^i} x^{(1)i}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(\alpha+1)I} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left(\frac{\partial y^I}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta)} x^{(\beta+1)i}.$$

Osserviamo inoltre dalla VI) che, per α fissato, $\binom{\alpha}{\beta}\left(\frac{\partial y^I}{\partial x^i}\right)^{(\alpha-\beta)} \equiv Y^{\alpha I}_{\beta i}$ è un exvettore covariante di grado α, sicché dalla VII') abbiamo

$$\underset{\circ}{y}^{(\alpha+1)I} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} (Y^{\alpha I}_{\beta i})_0 \, \underset{\circ}{x}^{(\beta+1)i} \qquad \text{per} \quad \alpha = 0, 1, \cdots, H-1,$$

$$y^{(\varphi+1)I} = \sum_{\beta=0}^{\varphi} Y^{\varphi I}_{\beta j} x^{(\beta+1)j} \qquad \text{per} \quad \varphi = H, \cdots, K-1,$$

e le (3.3) possono scriversi nella forma extensoriale

$$Y^I = \underset{\circ}{y}^I + \sum_{\alpha=0}^{H-1} \sum_{\beta=0}^{\alpha} \underset{\alpha}{\lambda} (Y^{\alpha I}_{\beta i})_0 \, \underset{\circ}{x}^{(\beta+1)i} + \sum_{\varphi=H}^{K-1} \sum_{\beta=0}^{\varphi} \underset{\varphi}{\lambda} \, Y^{\varphi I}_{\beta i} x^{(\beta+1)i}.$$

Esprimiamo similmente lo spazio $\tilde{\tilde{S}}_K$ colle formole:

$$\tilde{\tilde{Y}}^I = \tilde{\tilde{y}}^I_o + \sum_{\alpha=o}^{H-1} \sum_{\beta=o}^{\alpha} \mu_\alpha (\tilde{\tilde{Y}}^{\alpha I}_{\beta i})_o \tilde{\tilde{x}}^{(\beta+1)i}_o + \sum_{\varphi=H}^{K-1} \sum_{\beta=o}^{\varphi} \mu_\varphi \tilde{\tilde{Y}}^{\varphi I}_{\beta i} \tilde{\tilde{x}}^{(\beta+1)i}$$

e chiamiamo siffatto siffatto spazio $\tilde{\tilde{S}}_K$ lo spazio parallelo di S_K.

L'intersezione di tutti quegli spazi S_K è lo spazio S_H definito dalle formole:

$$Y^I = y^I_o + \sum_{\alpha=o}^{H-1} \sum_{\beta=o}^{\alpha} \lambda_\alpha (Y^{\alpha I}_{\beta i})_o x^{(\beta+1)i}_o$$

e similmente l'intersezione degli spazi $\tilde{\tilde{S}}_K$ è lo spazio dato da

$$\tilde{\tilde{Y}}^I_o = \tilde{\tilde{y}}^I_o + \sum_{\alpha=o}^{H-1} \sum_{\beta=o}^{\alpha} \mu_\alpha (\tilde{\tilde{Y}}^{\alpha I}_{\beta i})_o \tilde{\tilde{x}}^{(\beta+1)i}_o .$$

Pertanto, dalla (3.1) risulta il

TEOREMA 2. – *Se* $\{H, K\}$ e $\{\widetilde{H, K}\}$ *sono varietà parallele, allora i relativi spazi* S_H *e* $\tilde{\tilde{S}}_H$ *risultano paralleli.*

Volgiamoci infine alle relazioni fra varietà algebriche parallele e trasformazione infinitesima dello spazio base.

Consideriamo il gruppo continuo G_1, ad un parametro τ, generato dalla trasformazione infinitesima:

$$x'^i = x^i + \xi^i(x)\, \delta\tau$$

dello spazio base, ove le equazioni differenziali

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \xi^i(x^1, \cdots, x^n) \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

determinano un sistema ∞^{n-1} di curve integrali, dette le traiettorie del gruppo. Siano $P(x^i_o)$, $P'(x'^i_o)$ punti infinitamente vicini su di una traiettoria. Quando le $(x'^i_o, x'^{(1)i}_o, \cdots, x'^{(H)i}_o, x'^{(H+1)i}, \cdots, x'^{(K)i})$ siano legate alle $(x^i_o, x^{(1)i}_o, \cdots, x^{(H)i}_o, x^{(H+1)i}, \cdots, x^{(K)i})$ dalla (2,5), dalla I° seguirà

$$\text{(3.4)} \qquad \begin{cases} L\, x^{(\alpha)i}_o = o & \text{per } \alpha = 1, \cdots, H \\ L\, x^{(\beta)i} = o & \text{per } \beta = H+1, \cdots, K, \end{cases}$$

ed allora diremo che è

$$\{H, K\} = \{H, K\}' \quad (\text{mod } G_1),$$

essendo $\{H, K\}$ e $\{H, K\}'$ le varietà date rispettivamente dagli elementi differenziali $E_K(x^{(1)i}_o, \cdots, x^{(H)i}_o, x^{(H+1)i}, \cdots, x^{(K)i})$ di centro P e $E'_K(x'^{(1)i}_o, \cdots, x'^{(H)i}_o, x'^{(H+1)i}, x'^{(K)i})$ di centro P'.

TEOREMA 3. – *Se il gruppo* G_1 *è un gruppo di movimenti affini, e se*

$$\{H, K\} = \{H, K\}' \quad (\text{mod } G_1),$$

allora

$$\{\widetilde{H, K}\} = \{\widetilde{H, K}\}' \quad (\text{mod } G_1),$$

dove $\{\widetilde{H, K}\}'$ *è la varietà parallela alla* $\{H, K\}'$ *ottenuta col trasporto dal punto* $(P'(\underset{\circ}{x}'^i)$ *al punto* $\overset{\approx}{P}(\underset{\circ}{x}'^i + dx^i)$.

La condizione affinché G_1 sia un gruppo di movimenti affini è che risulti

$$L\Gamma^i_{jk} = 0 \qquad ([12], \text{ p. } 7).$$

Dunque, in virtù della IV°, si ottiene così

$$L\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta j \gamma k} = 0, \tag{3.5}$$

e si tratta di calcolare le derivate di Lie dei seguenti elementi differenziali:

$$\underset{\circ}{\overset{\approx}{x}}{}^{(\alpha+1)i} = \underset{\circ}{x}{}^{(\alpha+1)i} - (\overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta j \gamma k})_0 \underset{\circ}{x}{}^{(\beta+1)j} d\underset{\circ}{x}{}^{(\gamma)k} \qquad \alpha = 0, \cdots, H-1,$$

$$\overset{\approx}{x}{}^{(\varphi+1)i} = x^{(\varphi+1)i} - \overset{*}{\Gamma}{}^{\alpha i}_{\beta j \gamma k} x^{(\beta+1)j} dx^{(\gamma)k} \qquad \varphi = H, \cdots, K-1.$$

Ma dalle (3.4), (3.5) abbiamo

$$L\underset{\circ}{\overset{\approx}{x}}{}^{(\alpha)i} = 0 \qquad \text{per} \quad \alpha = 0, \cdots, H,$$

$$L\overset{\approx}{x}{}^{(\beta)i} = 0 \qquad \text{per} \quad \beta = H+1, \cdots, K,$$

ond'è fatto

$$\{\widetilde{H, K}\} = \{\widetilde{H, K}\}' \qquad (\text{mod } G_1).$$

Il teorema 3 esprime la permutabilità fra trasformazione infinitesima movinento affine e trasformazione parallela di una varietà algebrica $\{H, H\}$. Da esso, tenuto conto di [12], p. 53 derivano poi facilmente i seguenti corollari.

COROLLARIO 1. – *Se il gruppo* G_1 *è un gruppo di movimento affini, e se*

$$\{H, K\} = \{H, K\}' \qquad (\text{mod } (G_1),$$

allora

$$\overset{\approx}{S}_H = \overset{\approx}{S}{}'_H \qquad (\text{mod } G_1)$$

dove $\overset{\approx}{S}{}'_H$ *è l'intersezione degli spazi* $\overset{\approx}{S}{}'_K$ *generatori della varietà algebrica* $\{\widetilde{H, K}\}'$.

COROLLARIO 2. – *Se* M_n *è uno spazio riemanniano, se* G_1 *è un gruppo di movimenti (o di trasformazioni omotetiche), e se*

$$\{H, K\} = \{H, K\}' \qquad (\text{mod } G_1).$$

allora

$$\{\widetilde{H, K}\} = \{\widetilde{H, K}\}' \qquad (\text{mod } G_1).$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] B. SEGRE, *Invarianti topologico–differenziali, varietà di Veronese e moduli di forme algebriche*, « Ann. di Mat. » (4), *61*, 113–138 (1956).

[2] B. SEGRE, *Some properties of differentiable varieties and transformations, with special reference to the analytic and algebric cases*, « Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete » N. F. Heft 13 (Berlin, Springer, 1957).

[3] B. SEGRE, *Sur les invariants projectifs absolus attachés aux éléments curvilignes et aux réseaux*, « Journ. de Math. » (11), *2*, 135–154 (1961).

[4] B. SEGRE, *Sui sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti*, « Rend. Acc. Lincei » (8), *20*, 271–539 (1956).

[5] A. KAWAGUCHI, *Die Differentialgeometrie höherer Orduung 1. Erweiterte Koordinaten–transformationen und Extensoren*, « Jour. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ. » (1), *9*, 1–152 (1940).

[6] H. V. CRAIG, *On tensor relative to the extended point transformation*, « Amer. J. M. », 59, 764–774 (1937).

[7] H. V. CRAIG, *On the structure of intrinsic derivative*, « Bulletin Amer. Math. Soc. », *52*, 332–342 (1947).

[8] T. ŌKUBO, *Über die Extensorrechnung in den Verallgemeinerten Räumen von Flächenelementen höher Ordnung*, « Jour. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. », *11*, 1–37 (1946).

[9] Y. KATSURADA, *On the extended connection parameters in a space with affine connection and Riemannian space*, « Jour. Fac. Sci., Hokkaido Univ. », *12*, 17–28 (1951).

[10] Y. KATSURADA, *Specialization of the theory of a space of higher order II. On the extended Lie derivative*, « Tensor. New Series », *2*, 15–26 (1952).

[11] Y. KATSURADA, *Alcune trasformazioni parallele di varietà algebriche* {H, K} *di Del Pezzo–Segre*, « Rend. Acc. Lincei » (8), *22*, 719–725 (1957).

[12] K. YANO, *The theory of Lie derivatives and its application*, Amsterdam 1957.