ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

GIULIANO SORANI

Residui di forme differenziali e omomorfismi di coomologia

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 32 (1962), n.3, p.
331–334.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_3_331_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Topologia. — *Residui di forme differenziali e omomorfismi di coomologia* (*). Nota di GIULIANO SORANI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

1. La teoria dei residui degli integrali multipli delle funzioni di più variabili complesse, dopo i lavori di G. de Rham [1], [2], E. Martinelli [4], [5], B. Segre [7], si inquadra in una teoria generale dei residui delle forme differenziali regolari elaborata da J. Leray [3] e successivamente generalizzata da F. Norguet [6].

In questa Nota si annunciano alcuni risultati, nell'ordine di idee di Norguet che appariranno più diffusamente in un prossimo lavoro (4).

2. Sia X uno spazio topologico localmente compatto, siano S_i ($i=1, \dots, m$) m sottoinsiemi chiusi di X .

Essendo $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq m$, poniamo:

$$(2,1) \quad S_{\hat{i}_1 \hat{i}_2 \dots \hat{i}_l}^{m-l} = \bigcap_{k=1, \dots, \hat{i}_1, \dots, \hat{i}_l, \dots, m} S_k,$$

e consideriamo la successione di inclusioni,

$$(2,2) \quad S = S^m \subset \bigcup_{i_1} S_{i_1}^{m-1} \subset \dots \subset \bigcup_{i_m} S_{i_m} \subset X,$$

dove le sopraindicate unioni s'intendono estese alla variabilità degli indici $i_1, \dots, i_m$ da 1 a m , si suppone $S \neq \emptyset$, e le inclusioni valide in senso stretto.

Le (2,2) danno luogo alla seguente successione esatta di cobordi di coomologia a supporti compatti, coefficienti complessi:

$$(2,3) \quad 0 \rightarrow H_c^p(S) \xrightarrow{\partial_1} H_c^{p+1} \left(\bigcup_{i_1} S_{i_1}^{m-1} - S \right) \xrightarrow{\partial_2} \dots \\ \dots \xrightarrow{\partial_{m-1}} H_c^{p+m-1} \left(\bigcup_{i_m} S_{i_m} - \bigcup_{i_1 < \dots < i_{m-2}} S_{\hat{i}_1 \dots \hat{i}_{m-2}}^2 \right) \xrightarrow{\partial_m} H_c^{p+m} \left(X - \bigcup_{i_m} S_{i_m} \right) \rightarrow 0.$$

La composizione di due successivi cobordi in (2,3) è un omomorfismo nullo e pertanto si ha:

$$(2,4) \quad 0 = \partial_m \circ \partial_{m-1} \circ \dots \circ \partial_1.$$

3. Mostriamo però che i gruppi H_c^{p+k} ($1 < k < m$) che compaiono in (2,3) si decompongono in somme dirette onde l'omomorfismo (2,4) si decompone a sua volta in una somma di omomorfismi non identicamente nulli.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 1 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1961-62.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1962.

(1) Nei « Rend. di Mat. », Roma (1962).

Poiché le considerate decomposizioni di spazi immagini si riflettono in analoghe decomposizioni degli spazi raffigurati, si hanno analoghe decomposizioni per gli omomorfismi cobordo di (2,3), e in particolare per l'omomorfismo composto (2,4). Il generico addendo dell'omomorfismo (2,4) riesce (come si prova facilmente) individuato a meno del segno: lo indichiamo con:

$$(3,6) \quad \delta^m : H_c^p(S) \longrightarrow H_c^{p+m}(X - \cup_i S_i),$$

e lo denominiamo *cobordo composto di coomologia*.

L'omomorfismo (3,6) si riduce a quello ottenuto da F. Norguet [6] per $m = 2$.

4. Supponiamo ora che $X - \cup_i S_i$ ed S siano varietà topologiche paracompatte orientabili, di dimensioni rispettive r ed $r - s$.

L'isomorfismo di Poincarè applicato entro $X - \cup_i S_i$ ed entro S fa passare dal cobordo composto di coomologia (3,6) al seguente omomorfismo che diremo *cobordo composto di omologia* (ponendo $q = r - s - p$):

$$(4,1) \quad \delta^m : H_{c,q}(S) \longrightarrow H_{c,q+s-m}(X - \cup_i S_i).$$

D'altra parte la dualità tra l'omologia a supporti compatti, coefficienti interi con divisione, e la coomologia a coefficienti complessi fa passare dall'omomorfismo (4,1) all'omomorfismo trasposto:

$$(4,2) \quad r^m : H^{q+s-m}(X - \cup_i S_i) \longrightarrow H^q(S),$$

che diremo *residuo composto*, legato a δ^m dalla « formula del residuo » (già considerata da Norguet [6] per $m = 1$):

$$(4,3) \quad \langle h^{q+s-m}, \delta^m h_q \rangle = \langle r^m h^{q+s-m}, h_q \rangle.$$

5. Sia ora X una varietà analitica complessa, non singolare, di dimensione complessa n ; sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ il punto generico di X . Siano $S_1, \dots, S_m$ $m \leq n$ sottovarietà analitiche di X , regolarmente immerse, di codimensione complessa 1, rappresentabili localmente con le equazioni $s_i(x) = 0$, con $s_i(x)$ funzione olomorfa di x .

Utilizzando un risultato di F. Norguet ([6] p. 2057) e la dualità tra l'omologia e la coomologia si stabilisce il seguente:

TEOREMA. - *Nelle dette ipotesi gli omomorfismi δ^m, r^m , definiti dalle (4,1), (4,2) coincidono rispettivamente col cobordo composto di omologia e con l'omomorfismo $(2\pi i)^m \text{Res}^m$ considerati da J. Leray ([3] p. 89).*

6. Ancora nelle stesse ipotesi indichiamo con $\tilde{S}$ una parte compatta di S e sia I un intorno tubolare di $\tilde{S}$ fibrato banalmente in sfere piene $2m$ -dimensionali. Indichiamo con F la fibra standard e con:

$$(6,1) \quad g : \tilde{S} \times F \longrightarrow I$$

l'omeomorfismo tra i punti (ξ, s) , ($\xi \in \tilde{S}$, $s \in F$), e i punti $x \in I$.

Sia γ un q -ciclo di $\tilde{S}$, σ un m -ciclo semplicemente separatore delle S_i in F (E. Martinelli [5] p. 281 e [8] p. 140); indichiamo con:

$$(6,2) \quad \Gamma = g(\gamma \times \sigma),$$

l' $(m+q)$ -ciclo di $I = \cup_i S_i$.

Definiamo forma semi-meromorfa normale in X una forma $\varphi(x)$ chiusa, regolare ⁽²⁾ in $X = \cup_i S_i$ e tale che in $I = \cup_i S_i$ si possa scrivere nella forma:

$$(6,3) \quad \varphi(\xi, s) = \sum_{0 \leq k \leq m} \sum_{i_1 < \dots < i_k \leq m} \frac{ds_{j_1}}{s_{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{ds_{j_k}}{s_{j_k}} \wedge \psi_{j_1 \dots j_k}(\xi, s),$$

ove $\psi_{j_1 \dots j_k}(\xi, s)$ è una $(q+m-k)$ -forma regolare in I .

Ciò posto si stabilisce il seguente:

TEOREMA. - Sia φ una forma semi-meromorfa normale in X , di grado $q+m$, γ un ciclo q -dimensionale di S ; gli omomorfismi r^m , δ^m , sono realizzati dalle:

$$(6,4) \quad r^m \varphi = \psi_{1 \dots m}|_S, \quad \delta^m \gamma = g(\gamma \times \sigma) = \Gamma,$$

e la formula del residuo (4,3) è realizzata dalla:

$$(6,5) \quad \int_{\Gamma} \varphi = (2\pi i)^m \int_{\gamma} \psi_{1 \dots m}.$$

BIBLIOGRAFIA.

- [1] G. DE RHAM, *Sur la notion d'homologie et sur les résidus d'intégrales multiples*, Congrès international des Mathématiciens (1932).
- [2] G. DE RHAM, *Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples*, « *Ens. Math.* » t. 35, pp. 213-218 (1936).
- [3] J. LERAY, *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe*, « *Bull. Soc. Math. France* », 87, pp. 81-180 (1959).
- [4] E. MARTINELLI, *La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse*, « *Rend. Acc. Naz. dei Lincei* », vol. XXV, serie 6, pp. 33-36 (1937).
- [5] E. MARTINELLI, *Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di più variabili complesse*, « *Ann. Mat. pura e applicata* », serie 4^a, t. 34, pp. 277-347 (1953).
- [6] F. NORGUET, *Sur la théorie des résidus*, « *C. R. Acc. Sc. Paris* », t. 248, pp. 2057-2059 (1959).
- [7] B. SEGRE, *Sull'estensione della formula integrale di Cauchy e sui residui degli integrali n -upli nella teoria delle funzioni di n variabili complesse*, « *Atti IV Congresso UMI* », pp. 174-182 (1937).
- [8] G. SORANI, *Sull'indicatore logaritmico per le funzioni di più variabili complesse*, « *Rend. di Mat.* », t. 19, pp. 130-142 (1960).

(2) Cioè tale che i coefficienti di $\varphi(x)$ sono funzioni complesse C^∞ di x .