
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

MIROSLAW KRZYŻAŃSKI

**Sur la solution fondamentale de l'équation linéaire
normale du type parabolique dont le dernier
coefficient est non borné. Nota I**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 32 (1962), n.3, p.
326-330.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_3_326_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Analisi matematica. — *Sur la solution fondamentale de l'équation linéaire normale du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné.* Nota I^(*) di MIROSLAW KRZYŻAŃSKI, presentata ^(**) dal Socio M. PICONE.

I. Dans le travail [5] de Monsieur A. Szybiak et moi nous avons considéré l'équation linéaire normale, homogène, du type parabolique

$$(1) \quad F(u) \equiv \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, X) u_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^m b_j(t, X) u'_{x_j} - u_t + c(t, X) u = 0$$

$$(a_{ij} = a_{ji}),$$

dont les coefficients sont définis dans une couche $\mathcal{C}: t_0 < t < T, X(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{E}^m$ ($\mathcal{E}^m$ étant l'espace euclidien à m dimensions). On a supposé que les coefficients $a_{ij}(t, X)$ et $b_j(t, X)$ ($i, j = 1, \dots, m$) sont continus et bornés dans $\mathcal{C}$, ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'au 3-me ordre, et qu'il existe un nombre $a_0 > 0$ tel que l'on ait

$$\mathfrak{A}(\Lambda) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, X) \lambda_i \lambda_j \geq a_0 \sum_{k=1}^m \lambda_k^2$$

pour $(t, X) \in \mathcal{C}$ et pour tout vecteur $\Lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Quant au coefficient $c(t, X)$, nous avons supposé qu'il est continu dans $\mathcal{C}$, lipschitzien par rapport à X et satisfait à l'inégalité

$$|c(t, X)| \leq A^2 |X|^2 + B,$$

où A et $B \geq 0$ sont des constantes et $|X|^2 = \sum_{i=1}^m x_i^2$. Ces hypothèses concernant le coefficient $c(t, X)$ ont été appelées brièvement hypothèses (H).

En admettant ces hypothèses, nous avons exposé un procédé permettant de déterminer la solution fondamentale de l'équation (1). Cette solution fondamentale a été représentée par la somme d'une série, et nous avons démontré la convergence de cette série en construisant une majorante convenable⁽¹⁾.

Dans le présent travail (Note I et II) nous allons exposer un procédé permettant de déterminer la solution fondamentale de l'équation (1) sous les mêmes hypothèses sur les coefficients $a_{ij}(t, X)$ et $b_j(t, X)$ et sous les hypothèses moins restrictives sur le coefficient $c(t, X)$. Nous supposons notamment que ce coefficient est continu dans la couche $\mathcal{C}$, borné dans chaque

(*) Chaque Note a son propre index bibliographique. La numérotation des formules est commune à toutes les deux Notes.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1962.

(1) Pour les autres recherches concernant la solution fondamentale des équations paraboliques aux coefficients non bornés voir S. ITÔ [4], S. EIDELMAN [1], J. ŻITOMIRSKIJ [8].

sous-ensemble borné de $\mathcal{C}$, lipschitzien par rapport à X et qu'il satisfait à l'inégalité

$$(2) \quad c(t, X) \leq A^2 |X|^2 + B,$$

A et B étant des constantes. Ces nouvelles hypothèses concernant le coefficient $c(t, X)$ seront appelées hypothèses $(\bar{H})$.

Dans la Note I nous exposons certains théorèmes concernant la fonction de Green. Dans la Note II nous appliquons ces théorèmes pour déterminer la solution fondamentale.

2. Nous adoptons ici la définition de la solution fondamentale de l'équation parabolique admise dans le travail [5]. Nous appelons *solution fondamentale* de l'équation (1) une fonction $U(t, X; s, Y)$ jouissant des propriétés suivantes.

1° $U(t, X; s, Y)$ est continue dans l'ensemble $\mathcal{S} : t_0 \leq s < t < T$, $0 < t - s < T_1$ ($T_1 \leq T - t_0$), $X \in \mathcal{E}^m$, $Y \in \mathcal{E}^m$, admet les dérivées U'_{x_i} , $U'_{x_i x_j}$ ($i, j = 1, \dots, m$), U'_t continues à l'intérieur de $\mathcal{S}$ et satisfait à l'équation (1) en tant que fonction du point (t, X) ⁽²⁾;

2° $\varphi(Y)$ étant une fonction continue dans $\mathcal{E}^m$, s'annulant en dehors d'une sphère (dépendant de la fonction $\varphi(Y)$ elle-même), on a, pour $X \in \mathcal{E}^m$, $t_0 \leq s < T$, l'égalité

$$(3) \quad \lim_{\substack{t \rightarrow s \\ X \rightarrow X}} \int_{\mathcal{E}^m} U(t, X; s, Y) \varphi(Y) dY = \varphi(X) \text{ }^{(3)}.$$

3. Dans la suite de la Note interviendra la notion de la fonction de Green, dont la définition va suivre. Soit S un domaine (ouvert) de l'espace $\mathcal{E}^m$, $\bar{S}$ sa fermeture, $F(S)$ sa frontière. Considérons le domaine cylindrique $D = S \times (t_0, T)$; désignons par $\bar{D}$ sa fermeture, par σ sa surface latérale $F(S) \times (t_0, T)$, par S_0 la partie de sa frontière située sur l'hyperplan $t = t_0$ (base inférieure de D). Nous appelons *fonction de Green* relative à l'équation (1) et au domaine D une fonction $G(t, X; s, Y)$ jouissant des propriétés suivantes:

1° $G(t, X; s, Y)$ est continue dans l'ensemble $\mathcal{D} : X \in \bar{S}$, $Y \in \bar{S}$, $t_0 \leq s < t < T$, $0 < t - s < T_1$ ($T_1 \leq T - t_0$), admet les dérivées G'_{x_i} , $G'_{x_i x_j}$ ($i, j = 1, \dots, m$), G'_t continues à l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{D}$ et satisfait à l'équation (1) en tant que fonction du point (t, X) ;

2° on a $G(t, X; s, Y) = 0$ pour $(t, X) \in \sigma$, $(s, Y) \in D$, $0 < t - s < T_1$;

(2) Il peut arriver que $T = \infty$ et que $T_1 = \infty$.

(3) Cette dernière condition a été énoncée dans [5] sous la forme moins restrictive, mais il est évident que la solution fondamentale déterminée dans [5] satisfait bien à la condition 2° sous la forme admise dans la Note présente.

3° $\varphi(Y)$ étant une fonction continue pour $Y \in \bar{S}$, s'annulant en dehors d'une sphère contenue dans S , on a

$$(4) \quad \lim_{\substack{t \rightarrow s \\ \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}_s}} \int G(t, \mathbf{X}; s, Y) \varphi(Y) dY = \varphi(\mathbf{X}) \quad \text{pour } \mathbf{X} \in S, \quad t_0 \leq s < T.$$

4. Nous allons démontrer certains lemmes dont nous ferons l'usage dans la suite. Posons

$$F_0(u) \equiv \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, X) u''_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^m b_j(t, X) u'_{x_j} - u'_t = 0$$

et considérons l'équation

$$(5) \quad F(u) \equiv F_0(u) + c(t, X) u = f(t, X),$$

dont les coefficients, ainsi que la fonction $f(t, X)$, sont définis dans le domaine D qui est cette fois borné par hypothèse. On suppose que la forme $\mathfrak{A}(\Lambda)$ (voir n-ro 1) est définie positive et que le coefficient $c(t, X)$ est borné supérieurement. Nous allons démontrer le lemme suivant.

LEMME 1. - Soit $u(t, X)$ une solution de l'équation (5) régulière ⁽⁴⁾ dans l'ensemble $D^* = D + S_0 + \sigma$ non négative (non positive) aux points de l'ensemble $S_0 + \sigma$. Si l'on a $f(t, X) \leq 0$ (resp. $f(t, X) \geq 0$) dans D , on a $u(t, X) \geq 0$ (resp. $u(t, X) \leq 0$) dans l'ensemble D^* .

Démonstration. - Posons

$$u(t, X) = v(t, X) e^{c_0 t},$$

où $c_0 > \sup_D c(t, X)$ est un nombre constant. La fonction $v(t, X)$ satisfait à l'équation

$$(6) \quad F_0(v) + [c(t, X) - c_0] v = f(t, X) e^{-c_0 t},$$

où $c(t, X) - c_0 < 0$, le second membre de l'équation (6) étant non positif. On a $v(t, X) \geq 0$ aux points de $S_0 + \sigma$. Il résulte des propriétés des extrema des solutions des équations paraboliques (voir M. Gevrey [3], M. Picone [6]) qu'on a $v(t, X) \geq 0$ et par suite $u(t, X) \geq 0$ dans D^* .

LEMME 2. - Soit $V(t, X; s, Y)$ une fonction déterminée dans l'ensemble $\mathfrak{D}$ (voir n-ro 3), le domaine D étant supposé borné. On suppose que la fonction $V(t, X; s, Y)$ est continue dans $\mathfrak{D}$, admet les dérivées $V'_{x_i}, V''_{x_i x_j}$ ($i, j = 1, \dots, m$), V'_t continues à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ et satisfait aux conditions suivantes:

i) on a $F(V) \leq 0$ ($F(V) \geq 0$) à l'intérieur de $\mathfrak{D}$ (les dérivations dans $F(V)$ étant effectuées relativement aux variables x_i et t);

ii) on a $V(t, X; s, Y) \geq 0$ (resp. $V(t, X; s, Y) \leq 0$) pour $(t, X) \in \sigma$, $(s, Y) \in D$;

(4) C'est à dire, continue dans D^* , admettant les dérivées $u'_{x_i}, u''_{x_i x_j}$ ($i, j = 1, \dots, m$), u'_t continues dans D .

iii) $\varphi(Y)$ étant une fonction continue et non négative pour $Y \in \bar{S}$, s'annulant en dehors d'une sphère située dans S , il existe la limite

$$(7) \quad \lim_{\substack{t \rightarrow s \\ X \rightarrow \mathbf{X}}} \int V(t, X; s, Y) \varphi(Y) dY = \psi(\mathbf{X})$$

pour $\mathbf{X} \in S$, $t_0 \leq s < T$, $\psi(X)$ étant une fonction non négative (resp. non positive) dans S .

Ceci étant supposé, on a $V(t, X; s, Y) \geq 0$ (resp. $V(t, X; s, Y) \leq 0$) dans $\mathfrak{D}$.

Démonstration. — Supposons qu'il existe un point $(\tilde{t}, \tilde{X}; \tilde{s}, \tilde{Y})$ à l'intérieur de l'ensemble $\mathfrak{D}$, tel que $V(\tilde{t}, \tilde{X}; \tilde{s}, \tilde{Y}) < 0$. Il existe dans $\mathfrak{D}''$ un voisinage $\omega(\tilde{Y}) \subset S$ du point $\tilde{Y}$, tel qu'on a $V(\tilde{t}, \tilde{X}; \tilde{s}, Y) < 0$ pour $Y \in \omega(\tilde{Y})$. Soit $\varphi(Y)$ une fonction positive dans $\omega(\tilde{Y})$, s'annulant en dehors de $\omega(\tilde{Y})$. Considérons la fonction

$$z(t, X) = \begin{cases} \int_{\tilde{s}} V(t, X; \tilde{s}, Y) \varphi(Y) dY & \text{pour } \tilde{s} < t < T, X \in \bar{S} \\ \psi(X) & \text{pour } t = \tilde{s}, X \in \bar{S}. \end{cases}$$

C'est une fonction continue dans $\bar{S} \times [\tilde{s}, T)$, satisfaisant à l'inégalité $F(z) \leq 0$ à l'intérieur de cet ensemble. Il est évident que $z(\tilde{t}, \tilde{X}) < 0$. Or il résulte des hypothèses ii) et iii) qu'on a $z(t, X) \geq 0$ pour $(t, X) \in \sigma$, $\tilde{s} < t < T$ et $z(\tilde{s}, X) \geq 0$ pour $X \in \bar{S}$. D'après le lemme 1 et l'hypothèse i) on a $z(t, X) \geq 0$ dans $\bar{S} \times (\tilde{s}, T)$ et en particulier $z(\tilde{t}, \tilde{X}) \geq 0$, ce qui est contraire à l'inégalité $z(\tilde{t}, \tilde{X}) < 0$. On a donc $V(t, X; s, Y) \geq 0$ dans $\mathfrak{D}$ ⁽⁵⁾.

5. Nous supposons, de même qu'au n-ro 4, que le domaine D est borné. Les théorèmes qui vont suivre concernent les propriétés de la fonction de Green relative à l'équation (1) et au domaine D , supposée existente. Quant aux coefficients de l'équation (1) nous admettons ici les mêmes hypothèses que nous avons faites au n-ro 4 sur les coefficients de l'équation (5).

THÉORÈME 1. — La fonction de Green $G(t, X; s, Y)$ est non négative.

Pour la démonstration il suffit d'appliquer le lemme 2 à la fonction $G(t, X; s, Y)$.

THÉORÈME 2. — La fonction de Green $G(t, X; s, Y)$ relative à l'équation (1) et au domaine D ne dépend pas des valeurs des coefficients de cette équation aux points extérieurs à $\bar{D}$.

Démonstration. — Considérons deux opérateurs $F_1(u)$ et $F_2(u)$ de la même forme que $F(u)$, dont les coefficients sont identiques à ceux de $F(u)$ dans D , mais peuvent en différer en dehors de $\bar{D}$. Soient $G_i(t, X; s, Y)$ les fonctions de Green relatives au domaine D et aux équations $F_i(u) = 0$ ($i = 1, 2$). Il suffit de démontrer qu'on a $G_1(t, X; s, Y) = G_2(t, X; s, Y)$

(5) Un raisonnement analogue a été appliqué par W. FELLER dans [2].

dans $\mathfrak{D}$. À cet effet nous appliquons le lemme 2 à la différence $G_1(t, X; s, Y) - G_2(t, X; s, Y)$.

6. Nous supposons maintenant que les coefficients de l'équation (1) satisfont aux hypothèses admises dans le travail [5] (voir n-ro 1), et en particulier que le coefficient $c(t, X)$ satisfait aux hypothèses (H). Il existe alors la solution fondamentale $U(t, X; s, Y)$ de l'équation (1) (voir n-ro 2) non négative dans $\mathfrak{S}$ (voir [5]), Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 3. — $G(t, X; s, Y)$ étant la fonction de Green relative au domaine D et à l'équation (1), on a dans $\mathfrak{D}$ l'inégalité

$$(8) \quad G(t, X; s, Y) \leq U(t, X; s, Y).$$

Démonstration. — La fonction $U(t, X; s, Y)$ étant non négative dans $\mathfrak{S}$ et en particulier pour $(t, X) \in \sigma$, $(s, Y) \in D$, $0 < t - s < T_1$, on démontre le théorème 3 en appliquant le lemme 2 à la différence $U(t, X; s, Y) - G(t, X; s, Y)$.

Les hypothèses sur les coefficients de l'équation (1) admises au n-ro 1 sont suffisantes pour assurer l'existence de la fonction de Green relative à l'équation (1) et au domaine D supposé borné. Pour tout ce que concerne la détermination de la fonction de Green voir M. Gevrey [3], S. Itô [4], W. Pogorzelski [7].

OUVRAGES CITÉS.

- [1] S. EIDELMAN, *Sur le problème de Cauchy pour les systèmes paraboliques avec les coefficients croissants* (en russe), « Dokl. Akad. N.S.S.S.R. », 127, N° 4, 760-763 (1950).
- [2] W. FELLER, *Zur Theorie der Stochastische Prozesse*, « Math. Annalen », 113, 113-160 (1936).
- [3] M. GEVREY, *Sur l'équation aux dérivées partielles du type parabolique*, « Journal de Math. pures et appl. », ser. VI, 9 (1913), 10 (1914).
- [4] S. ITÔ, *Fundamental solutions of parabolic differential equations and boundary value problems*, « Japan Journal of Math. », 27, 55-102 (1958).
- [5] M. KRZYŻAŃSKI et A. SZYBIK, *Construction et étude de la solution fondamentale de l'équation linéaire du type parabolique dont le dernier coefficient est non borné*, « Atti dell'Accad. Naz. dei Lincei », Cl. di Sc. fisiche, mat. e natur., ser. VIII, 27, fasc. 1-2 e 3-4 (1959).
- [6] M. PICONE, *Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera*, « Mathematische Annalen », 10, 701-712 (1929).
- [7] W. POGORZELSKI, *Étude d'une fonction de Green et du problème aux limites pour l'équation parabolique normale*, « Annales Polonici Mathematici », IV, 3, 288-307 (1958).
- [8] JA. ŽITOMSKIJ, *Problème de Cauchy pour les systèmes paraboliques d'équations linéaires aux dérivées partielles avec les coefficients croissants* (en russe), « Izviest. vysš. učebn. zaviedienij. Matematika », N° 1, 55-74 (1959).