Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Silvio Cinquini

Sopra l'esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali estesi a intervalli infiniti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.3, p. 320–325.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_3_320_0¿

Analisi matematica. — *Sopra l'esistenza dell'estremo assoluto per gli integrali estesi a intervalli infiniti.* Nota di SILVIO CINQUINI, presentata [(*)] dal Socio G. SANSONE.

In una Nota [(1)] di parecchi anni fa ho impostato il problema della ricerca dell'estremo assoluto degli integrali

$$I_{C(+\infty)} = \int_a^{+\infty} f(x, y(x), y'(x))\, dx ,$$

indicando in qual modo da teoremi di esistenza per gli integrali

$$I_C = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\, dx$$

si ottengono, sotto opportune condizioni, proposizioni valevoli per gli integrali $I_{C(+\infty)}$.

Come è noto, della teoria degli integrali $I_{C(+\infty)}$ S. Faedo [(2)] ha fatto applicazione alla sistemazione teorica del metodo variazionale di M. Picone per l'integrazione numerica di equazioni a derivate parziali della Fisica matematica; e in vista di tale applicazione le ricerche sugli integrali $I_{C(+\infty)}$ sono state riprese e ampliamente sviluppate dal Faedo stesso [(3)], il quale ha esteso la propria indagine anche al caso, in cui l'integrale $I^{(m,n)}_{C(+\infty)}$ da render minimo dipende da più funzioni $y_i(x)$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$ e dalle loro derivate dei primi n ordini.

Un ulteriore contributo alla teoria degli integrali $I_{C(+\infty)}$ è stato arrecato da una Memoria di G. Darbo [(4)], nella quale è contenuta una notevole proposizione, accennata nel successivo n. 1.

(*) Nella seduta del 10 marzo 1962.

(1) S. CINQUINI, *Una nuova estensione dei moderni metodi del Calcolo delle Variazioni*, « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. IX, pp. 253–261 (1940); ed anche *Sopra una nuova estensione dei moderni metodi del Calcolo delle Variazioni*, « Atti del 2° Congresso dell'Unione Matematica Italiana », pp. 129–132 (1940).

(2) S. FAEDO, *Contributo alla sistemazione teorica del metodo variazionale per l'analisi dei problemi di propagazione*, « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. X, pp. 139–155 (1941).

(3) Ci limitiamo a citare i due lavori di data più recente: S. FAEDO, *Il calcolo delle variazioni per gli integrali su intervalli infiniti*, « Rend. di Matematica e delle sue applicazioni », vol. 8, pp. 94–125 (1949); *Il calcolo delle variazioni per gli integrali estesi a intervalli infiniti*, « Annali Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. VII, pp. 91–132 (1953).

(4) G. DARBO, *L'estremo assoluto per gli integrali su intervallo infinito*, « Rend. Seminario Matematico Università di Padova », vol. 22, pp. 399–416 (1953).

Nelle presenti righe, in cui, per ragioni di spazio, mi occupo soltanto degli integrali $I_{C(+\infty)}$, rilevo (n. 2) un teorema, il quale tiene conto anche dell'eventualità, in cui, $y = y_0(x)$, $(a_0 \leq x < +\infty)$ essendo una curva che fornisce l'estremo assoluto, la funzione $y_0(x)$ non risulta limitata, quando x tende a $+\infty$. Qualche esempio (n. 3) mette in luce come l'efficacia di tale teorema sia più ampia di quanto può sembrare a prima vista; segue (n. 4) qualche considerazione complementare.

1. PRELIMINARI. – *a*) Per le generalità rinviamo al n. 1 della nostra Nota citata per prima in [1].

b) Nella proposizione di Darbo citata in [4] figurano, oltre all'ipotesi che l'integrale sia quasi regolare, le seguenti condizioni:

α) esista una funzione continua $\Phi(x, y')$ definita per $x \geq 0$ e per ogni y', tale che

$$\lim_{|y'| \to \infty} \frac{\Phi(x, y)'}{|y'|} = +\infty, \qquad (x \geq 0),$$

e per la quale valga la disuguaglianza

$$f(x, y, y') \geq \Phi(x, y')$$

in ogni punto (x, y) di un campo normale A e per ogni y';

β) esistano una funzione $\Psi(x)$ integrabile in senso generalizzato in $(0, +\infty)$, e una funzione $Q(x, y)$ continua con $\partial Q/\partial x$ nel campo A, siffatta da aversi

$$\iint_A \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dx\, dy < +\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} Q(x, y) = 0$$

per quasi ogni y, ed

$$f(x, y, y') \geq Q(x, y)\, y' + \Psi(x)$$

per ogni (x, y) appartenente ad A e per ogni y'.

2. TEOREMA. – *Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:*

1ª *in tutti i punti* (x, y) *del campo* A *è* $x \geq 0$ [5], *ed anche per qualunque valore reale di* y'

$$f(x, y, y') \geq \Psi(x),$$

ove $\Psi(x)$ *è una funzione definita e continua per ogni* $x \geq 0$ *e tale che esista finito l'integrale generalizzato*

$$\int_0^{+\infty} \Psi(x)\, dx;$$

(5) È ovvio che ciò non costituisce una restrizione.

2ª $I_{C^{(+\infty)}}$ *è un integrale quasi regolare positivo;*

3ª *in ogni punto* (x, y) *del campo* A *è*

$$\lim_{|y'| \to \infty} \left| \frac{f(x, y, y')}{y'} \right| = \infty ;$$

4ª *in corrispondenza a ogni numero* $u > 0$ *esistono due numeri* $\lambda > 0$ *e* N *e una funzione* $\varphi(t)$ *definita per* $|t| \geq \lambda$, *continua, non negativa e tale che sia*

$$\int_{\lambda}^{+\infty} \varphi(t)\, dt = +\infty \quad , \quad \int_{-\infty}^{-\lambda} \varphi(t)\, dt = +\infty ,$$

in modo che in tutti i punti (x, y) *di* A *con* $0 \leq x \leq u$, $|y| \geq \lambda$ *sia*

$$f(x, y, y') + N \geq |y'| \varphi(y) ,$$

per tutti gli y' *che verificano la disuguaglianza* $|y'| \varphi(y) \geq 1$ [6].

Allora esiste il minimo assoluto di $I_{C^{(+\infty)}}$ *in ogni classe* K *di curve* $C^{(+\infty)}: y = y(x)$, $(a \leq x < +\infty)$ *appartenenti al campo* A, *la quale sia completa al finito, e tale che su ogni curva di* K *ci sia almeno un punto* $(x, y(x))$ *appartenente a un dato insieme* A* *limitato e chiuso.*

Per provare il teorema enunciato basta tener presente le seguenti considerazioni.

In virtù dell'ipotesi 1ª in ogni classe K di curve $C^{(+\infty)}$, soddisfacenti alle condizioni indicate, esiste finito il limite inferiore di $I_{C^{(+\infty)}}$.

Inoltre possiamo senz'altro supporre che sia $\Psi(x) \equiv 0$, vale a dire $f(x, y, y') \geq 0$, perché in caso contrario basterebbe considerare, in luogo di $f(x, y, y')$, la funzione $f_1(x, y, y') \equiv f(x, y, y') - \Psi(x)$; pertanto, indicato con i il limite inferiore $I_{C^{(+\infty)}}$ in K, è $i \geq 0$.

Ciò premesso, se

$$C_n^{(+\infty)}: \qquad y = y_n(x) , \qquad (a_n \leq x < +\infty)$$

$(n = 1, 2, \cdots)$ è una successione di curve estratta dalla classe K e minimizzante $I_{C^{(+\infty)}}$, vale a dire tale che sia

$$I_{C_n^{(+\infty)}} \leq i + \frac{1}{n} ,$$

consideriamo un numero u del tutto arbitrario, purché maggiore della massima ascissa dei punti dell'insieme A*.

Tenuto presente che è a maggior ragione

$$\int_{a_n}^{u} f(x, y_n(x), y'_n(x))\, dx \leq i + \frac{1}{n} , \qquad (n = 1, 2, \cdots) ,$$

(6) L'ipotesi 4ª differisce lievemente dal raffinamento arrecato da Faedo a una condizione, che figura nella Nota citata in (1).

in base all'ipotesi 4^a si può determinare (7) un numero $v(u) > 0$, tale che, qualunque sia la curva della successione considerata, in tutto il rispettivo intervallo (a_n, u) sia verificata la disuguaglianza

$$|y_n(x)| \leq v(u).$$

Successivamente in virtù dell'ipotesi 3^a in corrispondenza a ogni coppia di numeri $u, v(u)$ si può costruire (8) una funzione $\Phi(z)$, $(0 \leq z < +\infty)$ inferiormente limitata e tale che sia $\lim\limits_{z \to +\infty} \frac{\Phi_u(z)}{z} = +\infty$, in modo che, in tutti i punti (x, y) del campo limitato A_u costituito da quei punti di A nei quali è $0 \leq x \leq u$, $|y| \leq v(u)$, sia verificata la disuguaglianza

$$f(x, y, y') \geq \Phi_u(|y'|).$$

Pertanto le funzioni $y_n(x)$, $(n = 1, 2, \cdots)$, considerate nel rispettivo intervallo $a_n \leq x \leq u$, risultano equiassolutamente continue.

Infine non rimane che procedere nel modo che abbiamo già sviluppato (9).

3. ESEMPI. – Alle ipotesi del teorema del n. 2 soddisfano le seguenti funzioni.

1° Consideriamo per $x \geq 0$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty$ la funzione

$$f(x, y, y') \equiv \frac{1}{1 + x^{5/2} + y^2} y'^2 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} y'.$$

Si tratta di un integrale regolare positivo. Con elementari considerazioni di Calcolo differenziale si verifica che, al variare di y', è

$$f(x, y, y') \geq -\frac{1}{4} \frac{1 + x^{5/2} + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

e quindi anche

$$f(x, y, y') \geq -\frac{1}{4} \frac{1 + x^{5/2}}{(1 + x^2)^2},$$

vale a dire è verificata la condizione 1^a.

È evidente che ha luogo la condizione 3^a.

In merito alla condizione 4^a rileviamo che, in corrispondenza a ogni $u > 0$, è ovviamente per $0 \leq x \leq u$

$$f(x, y, y') \geq \frac{1}{1 + u^{5/2} + y^2} y'^2 - \frac{1}{1 + y^2} \frac{y'^2 + 1}{2} \geq \left[\frac{1}{1 + u^{5/2} + y^2} - \frac{1}{2(1 + y^2)}\right] y'^2 - \frac{1}{2},$$

(7) S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza della soluzione nei problemi di Calcolo delle Variazioni di ordine n*, « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. V, pp. 169–190 (1936). Vedi n. 14 α), p. 188 e n. 12, p. 186.

(8) Vedi L. TONELLI, *Su gli integrali del Calcolo delle variazioni in forma ordinaria*, « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. III, pp. 401–450 (1934). In particolare n. 11, pp. 416–17.

(9) S. CINQUINI, luogo citato per primo in (1), n. 2, p. 256.

e anche, se sono verificate entrambe le disuguaglianze $u^{5/2} \leq \frac{1+y^2}{2}$, $y^2 \geq 1$,

$$f(x, y, y') \geq \frac{1}{6} \frac{1}{1+y^2} y'^2 - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{12} \frac{y'^2}{y^2} - \frac{1}{2},$$

e si conclude che risulta

$$f(x, y, y') + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2\sqrt{3}} \left| \frac{y'}{y} \right|$$

per $\frac{1}{2\sqrt{3}} \left| \frac{y'}{y} \right| \geq 1$, vale a dire la condizione 4^a per $\lambda = 1 + \sqrt{2x^{5/2} - 1}$, $\varphi(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}\,|t|}$.

2° Per $x \geq 0$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty$ sia

$$f(x, y, y') \equiv \frac{1}{1+x^2+y^2} [y'^2 - 2\sqrt{1+y'^2}].$$

Si verifica immediatamente che si tratta di un integrale quasi–regolare positivo e che è

$$f(x, y, y') \geq -\frac{2}{1+x^2},$$

vale a dire sono verificate le condizioni 1^a e 2^a; ed è ovvio che ha luogo la condizione 3^a.

Infine, essendo per qualunque y' reale $y'^2 - 2\sqrt{1+y'^2} \geq \frac{1}{2} y'^2 - \frac{5}{2}$, per $0 \leq x \leq u$ vale la disuguaglianza

$$f(x, y, y') \geq \frac{1}{2(1+u^2+y^2)} y'^2 - \frac{5}{2};$$

pertanto, se è $\sqrt{1+u^2} \leq |y|$, risulta

$$f(x, y, y') + \frac{5}{2} \geq \frac{1}{4} \frac{y'^2}{y^2} \geq \frac{1}{2} \left| \frac{y'}{y} \right|$$

per $\frac{1}{2} \left| \frac{y'}{y} \right| \geq 1$, vale a dire la condizione 4^a per $\lambda = \sqrt{1+u^2}$, $\varphi(t) = \frac{1}{2|t|}$.

4. OSSERVAZIONI. – *a*) Le funzioni considerate nei due esempi del n. 3 non soddisfano all'ipotesi α) di Darbo.

b) D'altra parte nel citato teorema di Darbo l'ipotesi α) non può essere attenuata, sostituendola con la nostra condizione 3^a, anche se associata alle 1^a e 2^a, come facilmente si constata.

A tal uopo basta adeguare un nostro precedente esempio [10]. Sia per $x \geq 0$, $|y| < +\infty$, $|y'| < +\infty$

$$f(x, y, y') \equiv \frac{y'^2}{(1+y^2)^2} + \frac{[(x-1)y-1]^2}{1+y^2}.$$

(10) S. CINQUINI, *Sopra l'esistenza dell'estremo in campi illimitati*, « Rend. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. IV, pp. 675–682 (1948). Cfr. n. 2 *b*) pp. 677–78.

È soddisfatta la condizione β) di Darbo per $Q(x, y) \equiv 0$, $\Psi(x) \equiv 0$, ma non la α); d'altra parte sono verificate le ipotesi 1ª, 2ª, 3ª del n. 2, ma non la 4ª.

Consideriamo per $n = 1, 2, \cdots$ le curve

$$C_n^{(+\infty)}: \qquad y = y_n(x), \qquad (0 \leq x < +\infty),$$

con

$$y_n(x) = n \quad, \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1 + \frac{1}{n} \quad ; \quad y_n(x) = \frac{1}{x-1} \quad, \quad \text{per} \quad 1 + \frac{1}{n} < x < +\infty.$$

La classe considerata è completa al finito, e tale che $y_n(2) = 1$, $(n = 1, 2, \cdots)$. Risulta

$$I_{C_n^{(+\infty)}} = \frac{(n+1)^3}{3n(1+n^2)} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \frac{1/n}{2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)},$$

e quindi $\lim_{n \to \infty} I_{C_n^{(+\infty)}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$, mentre per qualunque intero $n > 0$ è $I_{C_n^{(+\infty)}} > \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$, vale a dire nella classe considerata non esiste il minimo di $I_{C^{(+\infty)}}$.