Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Alessandro Ossicini

Sui coefficienti di Gegenbauer-Stieltjes di una funzione non decrescente

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.3, p. 313–319.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_3_313_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi matematica. — *Sui coefficienti di Gegenbauer-Stieltjes di una funzione non decrescente* (*). Nota di ALESSANDRO OSSICINI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. In questo lavoro ci proponiamo di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinché un'assegnata successione di numeri reali $\{a_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, sia quella dei coefficienti di Gegenbauer-Stieltjes [cioè rispetto al sistema dei polinomi ultrasferici $P_n^{(\lambda)}(x)$]:

$$(1.1) \qquad \begin{cases} a_n = I_n^{(\lambda)} \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}(x)\, d\varphi(x), \\ I_n^{(\lambda)} = \dfrac{2^{2\lambda-1}[\Gamma(\lambda)]^2 (n+\lambda)\, n!}{\pi\Gamma(n+2\lambda)}, \end{cases}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots) \quad ; \quad \left(\frac{1}{2} \leq \lambda < 1\right)$$

di una funzione $\varphi(x)$ non decrescente.

Per trattare la questione è necessario premettere un particolare sviluppo in serie di polinomi ultrasferici.

2. Consideriamo lo sviluppo di x^m (con m intero e positivo) secondo i polinomi ultrasferici ([1] p. 163):

$$(2.1) \qquad x^m = \frac{\Gamma(\lambda)\, m!}{2^m} \sum_{s=0}^{[m/2]} \frac{(m-2s+\lambda)\, P_{m-2s}^{(\lambda)}(x)}{s!\, \Gamma(m-s+\lambda+1)}$$

e i polinomi di Tchebychef di prima specie

$$(2.2) \qquad T_0(x) = 1 \quad , \quad T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^m (n-m-1)!\, (2x)^{n-2m}}{m!\, (n-2m)!}, \qquad n \geq 1.$$

A causa della (2.1) si ottiene

$$(2.3) \qquad T_0(x) = P_0^{(\lambda)}(x) = 1$$

$$(2.4) \qquad T_n(x) = \frac{n}{2} \Gamma(\lambda) \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!} \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-2m}{2}\right]} \frac{(n-2m-2s+\lambda)\, P_{n-2m-2s}^{(\lambda)}(x)}{s!\, \Gamma(n-2m-s+\lambda+1)}$$

coll'avvertenza che se n è pari, la somma interna, per $m = \frac{n}{2}$, va sostituita col valore 1.

(*) Lavoro del gruppo di ricerca N. 22 del C.N.R. eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1962.

La (2.4) può mettersi sotto la forma

$$\mathrm{T}_n(x) = \Gamma(\lambda) \sum_{m=0}^{[n/2]} (n - 2m + \lambda)\, \mathrm{K}_{n,m}^{(\lambda)}\, \mathrm{P}_{n-2m}^{(\lambda)}(x)\,, \tag{2.5}$$

ove $\mathrm{K}_{n,m}^{(\lambda)}$ denota

$$\mathrm{K}_{n,m}^{(\lambda)} = \frac{n}{2} \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s (n-s-1)!}{s!\, \Gamma(n-m-s+\lambda+1)\,(m-s)!}\,.$$

Ora in base alla nota relazione ([2] p. 162)

$$\sum_{s=0}^{m} \binom{\alpha}{s} \binom{\beta}{m-s} = \binom{\alpha+\beta}{m}$$

si ha

$$\mathrm{K}_{n,m}^{(\lambda)} = \frac{n}{2} (-1)^m \frac{\Gamma(\lambda+1)\,(n-m-1)!}{m!\,\Gamma(n-m+\lambda+1)\,\Gamma(\lambda-m+1)}$$

e quindi

$$\mathrm{T}_n(x) = \frac{n}{2} \lambda [\Gamma(\lambda)]^2 \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (n-2m+\lambda)\,(n-m-1)!\, \mathrm{P}_{n-2m}^{(\lambda)}(x)}{m!\,\Gamma(n-m+\lambda+1)\,\Gamma(\lambda-m+1)}\,. \tag{2.6}$$

3. Accanto ai coefficienti a_n definiti da (1.1) introduciamo altri numeri $b_0, b_1, b_2 \cdots$ definiti dalla formula seguente (ove si è posto $\theta = \arccos x$, $0 \leq \theta \leq \pi$)

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} \cos n\theta \, d\varphi(x)\,. \tag{3.1}$$

I numeri b_n si esprimono linearmente per mezzo dei coefficienti a_n. Si ha infatti per le (2.3), (2.6), poiché $\mathrm{T}_n(\cos\theta) = \cos n\theta$:

$$b_0 = \frac{\pi\Gamma(2\lambda)}{2^{2\lambda}\lambda[\Gamma(\lambda)]^2}\, a_0\,, \tag{3.2}$$

$$b_n = \frac{\pi n \lambda}{2^{2\lambda+1}} \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (n-m-1)!\,\Gamma(n-2m+2\lambda)}{m!\,(n-2m)!\,\Gamma(n-m+\lambda+1)\,\Gamma(\lambda-m+1)}\, a_{n-2m}\,. \tag{3.3}$$

Viceversa i coefficienti a_n possono esprimersi linearmente per mezzo dei b_n. Basta ricordare che ([3] p. 94).

$$\mathrm{P}_n^{(\lambda)}(\cos\theta) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \varepsilon_{n-2m}\, \alpha_m\, \alpha_{n-m} \cos(n-2m)\,\theta\,, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{3.4}$$

ove

$$\alpha_k = \frac{\Gamma(k+\lambda)}{k!\,\Gamma(\lambda)} \quad , \quad \varepsilon_k = \begin{cases} 1 & (\text{se } k = 0) \\ 2 & (\text{se } k \neq 0) \end{cases}$$

per ottenere

$$a_n = \frac{2^{2\lambda}(n+\lambda)}{\pi} \sum_{m=0}^{[n/2]} \varepsilon_{n-2m} \binom{n}{m} \mathrm{B}(m+\lambda\,, n-m+\lambda)\, b_{n-2m} \tag{3.5}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

avendo fatto uso della funzione euleriana Beta.

4. Dimostriamo ora il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinché una data successione di numeri reali $\{a_n\}$ *sia la successione dei coefficienti di Gegenbauer-Stieltjes di una funzione* $\varphi(x)$ *non decrescente è che costruita la corrispondente successione* $\{b_n\}$ *definita dalle* (3.2), (3.3) *e posto*

$$D_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \cdots\cdots b_n \\ b_1 & b_0 & b_1 \cdots\cdots b_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} \cdots b_0 \end{vmatrix},$$

si verifichi uno dei seguenti casi:

I) *per un certo* $k \geq 0$ *si ha* $D_n > 0 \ (n = 0, 1, \cdots k-1)$, $D_n = 0$ $(n \geq k)$;

II) *tutti i determinanti* D_n *sono positivi.*

Dimostrazione. – La condizione è necessaria. Sia $\varphi(x)$ non decrescente in $(-1, 1)$; poiché $\cos n\theta$ è continua in $(-1, 1)$, detto $\psi(x)$ l'integrale indefinito nel senso di Stieltjes della funzione $(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ continua rispetto alla funzione non decrescente $\varphi(x)$, cioè

$$\psi(x) = c + \int_{-1}^{x} (1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} d\varphi(t) \tag{4.1}$$

si ha ([4] p. 436)

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \cos n\theta d\varphi(x) = \int_{-1}^{1} \cos n\theta \, d\psi(x) . \tag{4.2}$$

La funzione $\psi(x)$ definita dalla (4.1) è non decrescente.

Considerati infatti due punti $t_1 < t_2$ in $(-1, 1)$ si ha per il teorema della media ([4], p. 433)

$$\psi(t_2) - \psi(t_1) = (1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} [\varphi(t_2) - \varphi(t_1)]$$

ove ξ è un punto di (t_1, t_2). Dalla non decrescenza della $\varphi(x)$ segue quindi la non decrescenza della $\psi(x)$.

Consideriamo ora per ogni intero $k \geq 0$ la seguente forma hermitiana nelle $k+1$ variabili complesse $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$:

$$H_k(\mu_0, \mu_1, \cdots \mu_k) = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \left\{ \left| \sum_{n=0}^{k} \mu_n e^{in\theta} \right|^2 + \left| \sum_{n=0}^{k} \mu_n e^{-in\theta} \right|^2 \right\} d\varphi(x) = \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} \mu_n \bar{\mu}_m \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} \cos(n-m)\theta d\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} \mu_n \bar{\mu}_m \int_{-1}^{1} \cos(n-m)\theta d\psi(x)$$

ed osserviamo che la (4.3) per la (3.1) si può scrivere

$$(4.4) \qquad H_k(\mu_0, \mu_1 \cdots \mu_k) = \sum_{n=0}^{k} \sum_{m=0}^{k} b_{n-m} \mu_n \bar{\mu}_m .$$

Ovviamente la (4.4) è definita o semidefinita positiva; esaminiamo sotto quali condizioni può essere semidefinita. Ricordando (4.1) e (4.2) si vede che può risultare $H_k = 0$ per valori non tutti nulli delle μ_k se $\psi(x)$ è funzione di ripartizione di masse positive concentrate in quei punti di $(-1, 1)$ che corrispondono a valori di θ verificanti le due equazioni

$$\sum_{n=0}^{k} \mu_n e^{in\theta} = 0 \quad , \quad \sum_{n=0}^{k} \mu_n e^{-in\theta} = 0 .$$

La condizione necessaria risulta quindi dimostrata se teniamo conto di un teorema del Ghizzetti [5] sui coefficienti di Legendre–Stieltjes. Il caso I della tesi del teorema si verifica se $\psi(x)$ è del tipo $\left[0, \frac{k}{2}\right]$ oppure $\left[2, \frac{k}{2} - 1\right]$ se k è pari; e del tipo $\left[1, \frac{k-1}{2}\right]$ se k è dispari (1).

La condizione è sufficiente. Sia $\{a_n\}$ una successione verificante uno dei primi due casi del teorema (onde in particolare $b_0 > 0$).

Le forme hermitiane $H_k(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_k)$ sono tutte definite o semidefinite positive, ne segue che le funzioni

$$[4.5] \qquad \sigma_k(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} H_h\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{k+1}}, \cdots, \frac{e^{ik\theta}}{\sqrt{k+1}}\right)$$

sono non negative in $(-1, 1)$ e quindi che le

$$(4.6) \qquad \psi_k(x) = \int_{-1}^{x} \sigma_k(t)\, dt \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

sono non decrescenti in tale intervallo. Facciamo vedere che queste $\psi_k(x)$ per l'ipotesi fatte sono equilimitate in $(-1, 1)$.

Poiché la (4.4) può scriversi

$$H_k(\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_k) = b_0 \sum_{n=0}^{k} |\mu_n|^2 + \sum_{l=1}^{k} b_l \sum_{n=0}^{k-l} (\mu_n \bar{\mu}_{n+l} + \bar{\mu}_n \mu_{n+l})$$

si ricava dalla (4,5)

$$\sigma_k(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \left(b_0 + 2 \sum_{l=1}^{k} \frac{k-l+1}{k+1} b_l \cos l\theta\right)$$

ovvero

$$(4.7) \qquad \sigma_k(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \sum_{l=0}^{k} \varepsilon_l \frac{k-l+1}{k+1} b_l \cos l\theta$$

ove ε_l ha il significato già detto.

(1) Una funzione $\psi(x)$ non decrescente in $(-1, 1)$ è detta del tipo (r, s) quando è una funzione di ripartizione di $r + s$ masse positive concentrate in altrettanti punti di $(-1, 1)$ di cui r situati agli estremi di tale intervallo ed s interni ad esso.

Si ha successivamente:

$$0 \leq \psi_k(x) \leq \psi_k(1) = \int_{-1}^{1} \sigma_k(x)\, dx =$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \left(\sum_{l=0}^{k} \varepsilon_l \frac{k-l+1}{k+1} b_l \cos l\theta\right) \operatorname{sen}\theta\, d\theta = 2\, b_0 .$$

Allora per un noto teorema di Helly ([6] p. 13) dalla successione $\{\psi_k(x)\}$ si può estrarre una successione parziale $\{\psi_{k_j}(x)\}$ che in $(-1, 1)$ converga quasi ovunque verso una $\psi(x)$ non decrescente:

$$\lim_{j\to\infty} \psi_{k_j}(x) = \psi(x) . \tag{4.8}$$

Calcoliamo ora i seguenti coefficienti

$$a^*_{kn} = \mathrm{I}_n^{(\lambda)} \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_n^{(\lambda)}(x)\, d\psi_k(x). \tag{4.9}$$

In base alla (4.6) si ha

$$a^*_{kn} = \mathrm{I}_n^{(\lambda)} \int_0^{\pi} \sigma_k(\cos\theta)\, \mathrm{P}_n^{(\lambda)}(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta =$$

$$\frac{2}{\pi} \mathrm{I}_n^{(\lambda)} \sum_{l=0}^{n} \varepsilon_l \frac{k-l+1}{k+1} b_l \int_0^{\pi} \mathrm{P}_k^{(\lambda)}(\cos\theta) \cos l\theta\, d\theta$$

e quindi poiché

$$\int_0^{\pi} \mathrm{P}_n^{(\lambda)}(\cos\theta) \cos l\theta\, d\theta = \begin{cases} \pi\alpha_m\, \alpha_{n-m} & \text{se } l = n - 2m\,;\ m = 0, 1, \cdots, [n/2] \\ 0 & \text{in ogni altro caso} \end{cases}$$

ponendo $l = n - 2m$ nell'ultima sommatoria risulta

$$a^*_{kn} = 2\, \mathrm{I}_n^{(\lambda)} \sum_{\substack{0 \leq m \leq [n/2] \\ m \geq \frac{n-k}{2}}} \varepsilon_{n-2m} \frac{k-n+2m+1}{k+1} \alpha_m\, \alpha_{n-m}\, b_{n-2m} \tag{4.10}$$

passiamo ora a calcolare il $\lim\limits_{k\to\infty} a^*_{kn}$. Possiamo nella (4.10) già supporre $k > n$ e scrivere

$$\lim_{k\to\infty} a^*_{kn} = 2\, \mathrm{I}_n^{(\lambda)} \lim_{k\to\infty} \sum_{m=0}^{[n/2]} \varepsilon_{n-2m} \frac{k-n+2m+1}{k+1} \alpha_m\, \alpha_{n-m}\, b_{n-2m} =$$

$$\frac{2^{2\lambda}(n+\lambda)}{\pi} \sum_{m=0}^{[n/2]} \varepsilon_{n-2m} \binom{n}{m} \mathrm{B}(m+\lambda\,,\, n-m+\lambda)\, b_{n-2m}$$

e quindi per la (3,5)

$$\lim_{k\to\infty} a^*_{kn} = a_n . \tag{4.11}$$

In base alle (4.8) (4.11) se dimostriamo che

$$\lim_{j\to\infty} \int_{-1}^{1} P_n^{(\lambda)}(x)\, d\,[\psi_{k_j}(x) - \psi(x)] = 0 \tag{4.12}$$

potremo affermare che per la successione $\{a_n\}$ si ha

$$a_n = I_n^{(\lambda)} \int_{-1}^{1} P_n^{(\lambda)}(x)\, d\psi(x)$$

con $\psi(x)$ non decrescente in $(-1, 1)$.

Integrando per parti e tenuto conto che $\psi_k(-1) = \psi(-1) = 0$, $\psi_k(1) = \psi(1) = 2\, b_0$ si ricava

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\lambda)}(x)\, d\,[\psi_{k_j}(x) - \psi(x)] = -\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx} P_n^{(\lambda)}(x) \cdot [\psi_{k_j}(x) - \psi(x)]\, dx$$

e poiché ([3] p. 81 e p. 166)

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\lambda)}(x) = 2\lambda\, P_{n-1}^{(\lambda+1)}(x) \quad ; \quad |P_n^{(\lambda)}(x)| \leq \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!\,\Gamma(2\lambda)}$$

ne segue

$$\left| \frac{d}{dx} P_n^{(\lambda)}(x) \cdot [\psi_{k_j}(x) - \psi(x)] \right| \leq \frac{4\, b_0 \lambda\, \Gamma(2\lambda+n+1)}{(n-1)!\, \Gamma(2\lambda+2)} .$$

Si può allora passare al limite, per $j \to \infty$ sotto il segno d'integrale ed ottenere in virtù della (4.8) la (4.12).

Abbiamo dimostrato quindi che se la successione $\{a_n\}$ verifica uno dei casi dell'enunciato del teorema si ha

$$a_n = I_n^{(\lambda)} \int_{-1}^{1} P_n^{(\lambda)}(x)\, d\psi(x)$$

con $\psi(x)$ non decrescente nell'intervallo $(-1, 1)$.

Consideriamo la funzione [2]

$$\varphi(x) = c + \int_{0}^{x} \frac{d\psi(t)}{(1-t^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}} . \tag{4.13}$$

La (4.13) per l'osservazione fatta all'inizio del n. 4 è non decrescente per $-1 < x < 1$.

Indicato ora con T_δ l'intervallo $T_\delta \equiv [-1+\delta \leq x \leq 1-\delta]$ abbiamo ([7] p. 76]

$$\int_{T_\delta} P_n^{(\lambda)}(x)\, d\psi(x) = \int_{T_\delta} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, P_n^{(\lambda)}(x)\, \frac{d\psi(x)}{(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}} = \int_{T_\delta} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\, P_n^{(\lambda)}(x)\, d\varphi(x) \tag{4.14}$$

(2) Non è escluso che l'integrale a secondo membro della (4.13) possa risultare uguale a $+\infty$ per $x = 1$ e a $-\infty$ per $x = -1$.

al tendere di $\delta \to 0$ il primo membro della (4.14) tende al numero finito $a_n/I_n^{(\lambda)}$ e si può quindi scrivere

$$a_n = I_n^{(\lambda)} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} P_n^{(\lambda)}(x)\, d\varphi(x) ;$$

resta così dimostrata la tesi.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. OSSICINI, *Sui coefficienti di Fourier di una funzione rispetto al sistema dei polinomi ultrasferici*, « Annali di matematica pura ed applicata », serie IV, tomo LI (1960).

[2] F. G. TRICOMI, *Vorlesungen Ueber Orthogonalreihen*, Berlin 1955.

[3] G. SZEGO, *Orthogonal Polynomials*, « American Mathematical, Society Colloquium Publications », vol. XXIII, New York 1939.

[4] G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di una variabile reale*. Parte seconda. *Sviluppo in serie di funzioni ortogonali*, Bologna 1946.

[5] A. GHIZZETTI, *Sui coefficienti di Legendre–Stieltjes di una funzione non decrescente*, « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, serie VIII, vol. XX, fasc. 6 (1956).

[6] J. D. TAMARKIN, J. SHOHAT, *The Problem of Moments*, « American Mathematical Society », New York 1943.

[7] N. GUNTHER, *Sur les intégrales de Stieltjes*, Chelsea Publishing Company, New York 1949.