Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, L. E. Krivoshein

Il metodo polinomiale nei problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.3, p. 306–312.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_3_306_0¿

Analisi matematica. — *Il metodo polinomiale nei problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali a derivate totali nel senso di Picone.* Nota [(*)] di DEMETRIO MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN, presentata dal Socio M. PICONE.

1. La vasta mole di lavori conseguitisi in questi ultimi tempi e concernenti l'elaborazione di un inquadramento unitario della teoria dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari, si è cristallizzata soprattutto nei risultati di G. Fichera, Iu. M. Berezanski, L. E. Krivošein, D. Mangeron, . . . , relativi rispettivamente alla posizione dei problemi al contorno per la più generale equazione ellittico–parabolica del secondo ordine [1], allo studio dei problemi al contorno per vari operatori differenziali generali non–ellittici [2] ed alla ricerca delle soluzioni delle equazioni a derivate totali [3]–[5]

$$(1)\qquad [\mathrm{A}(x)\,u' + \lambda \mathrm{B}(x)\,u]' + \lambda\,[\mathrm{B}(x)\,u' + \mathrm{C}(x)\,u] = 0\,,$$

$$u|_{\mathrm{FR}} = 0 \quad , \quad \mathrm{R}\,(x_i^* \leq x_i \leq x_i^{**})\,, \qquad (i = 1\,,2\,,\cdots,2\,n)$$

oppure [6], [7]

$$(2)\qquad \mathrm{D}^n u(x\,,y) - \lambda\,(n-1)\,!^2\,[\mathrm{A}(x\,,y)\,u(x\,,y) + \mathrm{B}(x\,,y)\,\mathrm{D}^r u(x\,,y)] =$$

$$(n-1)\,!^2 \left[f(x\,,y) + \lambda \iint\limits_{\mathcal{S}} \mathcal{E}(x\,,y\,,\xi\,,\eta) \sum_{0}^{n} \mathrm{F}_{\mathrm{P}}(\xi\,,\eta)\,\mathrm{D}^{\mathrm{P}} u(\xi\,,\eta)\,d\xi\,d\eta \right],$$

$$[\mathrm{D}^i u]_{x=a} = [\mathrm{D}^i u]_{y=b} = 0\,, \qquad (i = 0\,,1\,,\cdots,n-1)$$

$$\mathcal{S} = \{a \leq x\,,\xi \leq c\,;\, b \leq y\,,\eta \leq d\}\,,$$

ove $\mathrm{D}u \equiv u'$ rappresenta la derivata totale di una funzione $u\,(x_1\,,x_2\,,\cdots,x_{2n})$, introdotta dall'illustre accademico linceo M. Picone [8] e definita tramite:

$$(3)\qquad \mathrm{D}u \equiv u' = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1\,\partial x_2 \cdots \partial x_{2n}} \qquad \left(\text{oppure } \mathrm{D}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right).$$

Nel presente lavoro si espone succintamente, riservando i dettagli per il «Bollettino dell'Istituto Politecnico di Iași» (Jassy), il metodo polinomiale di approssimazione delle soluzioni (e delle derivate di esse) dei problemi (4), (5) di cui sotto, spettanti ad una classe di equazioni integro–differenziali a derivate totali più generale da quella di cui si son prese le mosse nella Nota lincea precedente [6].

2. Sia il problema omogeneo di Goursat

$$(4)\qquad \mathrm{D}^k u(\mathrm{A}) + \sum_{0}^{k-1} p_i(\mathrm{A})\,\mathrm{D}^i u(\mathrm{A}) - \lambda \iint\limits_{\mathcal{S}} \sum_{0}^{m} \mathrm{M}_i(\mathrm{A}\,,\mathrm{B})\,\mathrm{D}^i u(\mathrm{B})\,d\mathrm{B} = f(\mathrm{A})\,,$$

$$(5)\qquad [\mathrm{D}^i u(x\,,y)]_{x=0} = [\mathrm{D}^i u(x\,,y)]_{y=0} = 0 \qquad (i = 0\,,1\,,\cdots,k-1)\,,$$

(*) Nella seduta del 10 marzo 1962.

ove $p_i(\mathrm{A}) \equiv p_i(x, y)$, $\mathrm{M}_i(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \equiv \mathrm{M}_i(x, y, \xi, \eta)$, $f(\mathrm{A}) = f(x, y)$ sono funzioni note, continue nel quadrato $\mathcal{S} = [0, 1] \times [0, 1]$, $\mathrm{D}u(\mathrm{A}) \equiv \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$ è la derivata totale nel senso di Picone [8], λ è un parametro e $u(x, y)$ è la soluzione ricercata. Si suppone inoltre che almeno uno dei nuclei $\mathrm{M}_i(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ non si riduce identicamente allo zero in ognuno dei sottodomini $\mathcal{S}_1 = \{0 \leq \xi \leq x \leq 1 ; 0 \leq \eta \leq y \leq 1\}$, $\mathcal{S} - \mathcal{S}_1$.

Trascrivendo l'equazione (4) sotto la forma.

$$\varphi(\mathrm{A}) - \iint\limits_{\mathcal{S}} \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \lambda)\, \varphi(\mathrm{B})\, d\mathrm{B} = f(\mathrm{A}), \tag{6}$$

alla quale si perviene tramite la rappresentazione di cui sotto della soluzione del problema (4), (5)

$$u(\mathrm{A}) = \frac{1}{(k-1)!^2} \int_0^x \int_0^y [(x-t)(y-\tau)]^{k-1} \varphi(t, \tau)\, dt\, d\tau \equiv \tag{7}$$

$$\frac{1}{(k-1)!^2} \iint\limits_{\mathcal{S}_1} [(x-t)(y-\tau)]^{k-1} \varphi(\mathrm{B})\, d\mathrm{B},$$

si dimostra il seguente teorema.

TEOREMA I. – La soluzione del problema (4), (5), in corrispondenza al caso in cui λ è un autovalore di rango r oppure non è un autovalore del nucleo $\mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \lambda)$ (6), è data sotto la forma

$$u(\mathrm{A}) = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} [(x-t)(y-\tau)]^{k-1} \left[\psi(\mathrm{B}, \lambda) + \sum_1^r d_i\, \beta_i(\mathrm{B}, \lambda)\right] d\mathrm{B} : (k-1)!^2, \tag{8}$$

oppure

$$u(\mathrm{A}) = \iint\limits_{\mathcal{S}_1} [(x-t)(y-\tau)]^{k-1}\, \Phi(\mathrm{B}, \lambda)\, d\mathrm{B} : (k-1)!^2, \tag{9}$$

essendovi soddisfatte nel primo caso le condizioni

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} f(\mathrm{B})\, \alpha_i(\mathrm{B}, \lambda)\, d\mathrm{B} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, r) \tag{10}$$

ove $\alpha_i(\mathrm{A}, \lambda)$ sono le autofunzioni del nucleo associato al nucleo $\mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \lambda)$, $\psi(\mathrm{A}, \lambda)$ è una soluzione particolare dell'equazione (6), $\beta_i(\mathrm{A}, \lambda)$ sono le autofunzioni corrispondenti all'autovalore λ di questa stessa equazione (6), $d_1, d_2, \cdots, d_r$ sono costanti arbitrarie, mentre

$$\Phi(\mathrm{A}, \lambda) \equiv f(\mathrm{A}) + \iint\limits_{\mathcal{S}} \mathrm{R}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \lambda) f(\mathrm{B})\, d\mathrm{B} \tag{11}$$

e $\mathrm{R}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \lambda)$ è il nucleo risolvente del nucleo $\mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \lambda)$.

3. Nel caso in cui non è noto il nucleo risolvente $R(A, B, \lambda)$ del nucleo $M(A, B, \lambda)$, mentre si sa che il problema (4), (5) possiede una soluzione $2k$ volte derivabile a derivate continue e $\varphi(A)$ è una funzione continua nel quadrato $\mathfrak{S} = [0, 1] \times [0, 1]$, per la costruzione delle soluzioni approssimate basata sulla considerazione del sistema risolvente si possono utilizzare con profitto per la rappresentazione approssimata della funzione $\varphi(A)$ i polinomi del tipo di Bernstein, studiati da A. F. Ipatov [9],

$$\varphi_{np}(A) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \varphi(\nu : n, s : p)\, T_{n\nu}(x)\, T_{ps}(y), \tag{12}$$

ove $\varphi(\nu : n, s : p)$ sono costanti da determinarsi e

$$T_{n\nu}(x) \equiv C_n^\nu x^\nu (1 - x)^{n-\nu} \quad ; \quad T_{ps}(y) \equiv C_p^s y^s (1 - y)^{p-s}. \tag{13}$$

Ne ha luogo il seguente teorema.

TEOREMA 2. - La soluzione approssimativa del problema (4), (5) si rappresenta sotto la forma

$$u_{np}(A) = \left[\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \rho_{\nu s}(\lambda) : (k-1)!^2\right] \iint_{\mathfrak{S}_1} [(x-t)(y-\tau)]^{k-1}\, T_{n\nu}(t)\, T_{ps}(\tau)\, dt\, d\tau, \tag{14}$$

$$\lim_{n,p \to \infty} u_{np}(A) = u(A), \tag{15}$$

$$|u_{np}(A) - u(A)| \leq [2(x \cdot y)^k : k!^2]\, \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \quad , \quad A \in \mathfrak{S}, \tag{16}$$

mentre la soluzione approssimata $\varphi_{np}(A) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \rho_{\nu s}(\lambda)\, T_{n\nu}(x)\, T_{ps}(y)$ si determina col sistema di $n \cdot p$ equazioni con altrettante incognite

$$\varphi(i : n, j : p) - \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \varphi(\nu : n, s : p) \left[\int_0^{i:n} \int_0^{j:p} N_1(i : n, j : p, B)\, T_{n\nu}(\xi)\, T_{ps}(\eta)\, d\xi\, d\eta \right. \tag{17}$$

$$\left. + \lambda \iint_{\mathfrak{S}} N_2(i : n, j : p, B)\, T_{n\nu}(\xi)\, T_{ps}(\eta)\, d\xi\, d\eta \right] = f(i : n, j : p),$$

$$(i = 0, 1, \cdots, n \; ; \; j = 0, 1, \cdots, p)$$

che può essere trascritto sotto la forma

$$\varphi_{ij} - \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} k_{\nu s ij}(\lambda)\, \varphi_{\nu s} = f_{ij}, \qquad (i = 0, 1, \cdots, n \; ; \; j = 0, 1, \cdots, p) \tag{18}$$

ove si suppone che il determinante $\Delta_{np}(\lambda)$ del sistema (18) è diverso da zero, $\omega(\gamma, \delta)$ è il modulo di continuità della funzione continua $\varphi(A)$, [9],

$$|\varphi_{np}(A) - \varphi(A)| \leq 2\, \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \quad , \quad A \in \mathfrak{S} \tag{19}$$

e $\rho_{\nu s}(\lambda)$ sono numeri noti che figurano nelle formule

$$\varphi_{\nu s} = \rho_{\nu s}(\lambda), \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n \; ; \; s = 0, 1, \cdots, p) \tag{20}$$

che si deducono dalle (18) tramite i procedimenti dell'algebra lineare.

Ha luogo la continuità uniforme nel processo del passaggio al limite

$$\lim_{n,p\to\infty} \varphi_{np}(A) = \varphi(A) \tag{21}$$

e le radici dell'equazione

$$\Delta_{np}(\lambda) = 0 \tag{22}$$

si considerano come valori approssimati degli autovalori del problema (4), (5).

La valutazione dell'errore commesso spettante al modulo della differenza (16) può essere precisata al di là dell'indicazione dell'ordine di grandezza data dalla disuguaglianza (16), nell'ipotesi

$$\sigma = 1 - \max_{g} \iint_{\mathcal{S}} |M(A, B, \lambda)| \, dB > 0 \quad , \quad g = \{A \in \mathcal{S}, \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2\}, \tag{23}$$

in cui ci si assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema (4), (5).

4. Tenendo conto della proprietà dei polinomi del tipo di Bernstein [9]:

$$\lim_{n,p\to\infty} \frac{\partial^{\alpha+\beta} B_{np}(A)}{\partial x^{\alpha}\, \partial y^{\beta}} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} u(A)}{\partial x^{\alpha}\, \partial y^{\beta}} \quad , \quad A \in \mathcal{S}, \tag{24}$$

ove

$$B_{np}(A) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} T_{n\nu}(x)\, T_{ps}(y)\, u(\nu : n, s : p), \tag{25}$$

ne ha luogo il seguente teorema.

TEOREMA 3. – La soluzione approssimata del problema (4), (5) tramite il metodo polinomiale ed escludendovi l'impiego dei sistemi risolventi di equazioni integrali si presenta sotto la forma

$$B_{np}(A) = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{s=1}^{p} T_{n\nu}(x)\, T_{ps}(y)\, V_{np}(\nu, s, \lambda), \tag{26}$$

ove i numeri $V_{np}(\nu, s, \lambda)$ si determinano dal sistema

$$u(i : n, j : p) - \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{s=0}^{p} \gamma(i, j, \nu, s, \lambda)\, u(\nu : n, s : p) = \delta(i, j), \tag{27}$$

$$(i = 0, 1, \cdots, n \; , \; j = 0, 1, \cdots, p),$$

$$u(\nu : n, s : p) = V_{np}(\nu, s, \lambda), \tag{28}$$

$$(\nu = 1, 2, \cdots, n \; ; \; s = 1, 2, \cdots, p),$$

nelle incognite $u(\nu : n, s : p)$, supponendovi il determinante $\omega_{np}(\lambda)$ diverso da zero. (27) risulta dall'equazione

$$(29) \qquad u(\mathrm{A}) = \iint_{\mathcal{S}_1} \frac{[(x-t)(y-\tau)]^{k-1}}{(k-1)!^2} \left[f(t,\tau) - \sum_{r=0}^{k-1} p_r(t,\tau)\, \mathrm{D}^r u(t,\tau) + \lambda \iint_{\mathcal{S}} \sum_{\alpha=0}^{m} \mathrm{M}_\alpha(t,\tau,\mathrm{B})\, \mathrm{D}^\alpha u(\mathrm{B})\, d\mathrm{B} \right] dt\, d\tau ,$$

ottenuta dal sistema (4), (5), sostituendovi (25) e ponendovi inoltre $x = i : n$, $y = j : p$.

L'approssimazione degli autovalori del problema (4), (5) si conseguisce tramite la risoluzione dell'equazione

$$(30) \qquad \omega_{np}(\lambda) = 0 ,$$

mentre alla valutazione degli errori commessi si può giungere nel modo indicato nel punto precedente.

5. *Osservazioni*. – *a*) Il metodo polinomiale di approssimazione escogitato può servire altresì, tenendovi conto delle proprietà spettanti alle equazioni integrali di Volterra, al caso in cui nel problema (4), (5) si ha

$$(31) \qquad \mathrm{M}_i(\mathrm{A},\mathrm{B}) \equiv \begin{cases} \mathrm{K}_i(\mathrm{A},\mathrm{B}) & , \quad \xi \le x , \eta \le y \\ 0 & , \quad \xi \ge x , \eta \ge y \quad ; \quad 0 \le x , \xi , y , \eta \le 1 . \end{cases}$$

b) Il metodo di approssimazione polinomiale schematizzato nel § 2 e concernente previe costruzioni di sistemi di equazioni integrali risolventi può essere esteso al caso di equazioni integro-differenziali del tipo

$$(32) \qquad \mathrm{D}^k u + \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{s=0}^{r} p_{is}(\mathrm{A}) \frac{\partial^{i+s} u}{\partial x^i \partial y^s} = f(\mathrm{A}) + \lambda \iint_{\mathcal{S}} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{\varrho=0}^{\gamma} \mathrm{M}_{j\varrho}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \frac{\partial^{j+\varrho} u(\mathrm{B})}{\partial t^j \partial \tau^\varrho} d\mathrm{B} ,$$

a patto che vi sia $(\nu , r , \alpha , \gamma) \le k$.

c) Il metodo mentovato cui sopra può essere esteso al caso dei sistemi integro-differenziali

$$(33) \qquad \frac{\partial^{n+\sigma} u}{\partial x^n \partial y^\sigma} + \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{s=0}^{r} p_{is}(\mathrm{A}) \frac{\partial^{i+s} u}{\partial x^i \partial y^s} = f(\mathrm{A}) + \lambda \iint_{\mathcal{S}} \sum_{j=0}^{\alpha} \sum_{\varrho=0}^{\gamma} \mathrm{M}_{j\varrho}(\mathrm{A},\mathrm{B}) \frac{\partial^{j+\varrho} u(\mathrm{B})}{\partial t^j \partial \tau^\varrho} d\mathrm{B} ,$$

$$(34) \qquad [u_{x^i}^{(i)}(\mathrm{A})]_{x=0} = 0 \quad ; \quad [u_{y^j}^{(j)}(\mathrm{A})]_{y=0} = 0$$

$$(i = 0 , 1 , \cdots , n-1 \; ; \; j = 0 , 1 , \cdots , \sigma - 1) , (\alpha , \nu) \le n , (r , \gamma) \le \sigma ,$$

mentre invece di (7) si utilizza la trasformazione integrale

$$(35) \qquad u(\mathrm{A}) = \Phi(\mathrm{A}) + \iint_{\mathcal{S}_1} (x-t)^{n-1} (y-\tau)^{\sigma-1} \varphi(\mathrm{B})\, d\mathrm{B} : [(n-1)!\,(\sigma-1)!] ,$$

ove $\Phi(\mathrm{A})$ soddisfa le condizioni (34).

d) La risoluzione del problema non omogeneo di Goursat per le equazioni integro-differenziali (4), (32), (33) ed altri ancora può essere proseguita seguendo il fruttuoso metodo recentemente elaborato dal S. Vasilache [10].

e) Nell'ipotesi in cui $\mathcal{S}$ è un dominio triangolare limitato dalle rette $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, la risoluzione approssimata dei problemi di cui sopra – sempre limitandosi al metodo polinomiale – può essere fatta in modo analogo tramite l'utilizzazione dei polinomi del tipo di S. N. Bernstein

$$(36) \qquad B_n(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} C_n^i C_{n-i}^j x^i y^j (1 - x - y)^{n-i-j} u(i:n, j:n),$$

studiati recentemente dal S. S. Stancu [11], [12].

f) I metodi elaborati si possono estendere poi al caso dei domini « rettangolari », considerati negli spazi ad un numero qualunque di dimensioni.

I risultati ottenuti in questo ordine di idee, come pure un'altra serie di ricerche spettanti alle equazioni integro-differenziali considerate ed altri ancora, anche nel quadro dei problemi di Dirichlet, ove si sfrutta pure una mole di risultati conseguiti dalla Scuola di Ia. V. Bykov [13], [14], costituiscono il soggetto di altre Note di prossima pubblicazione [15], [16].

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. FICHERA, *On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order*, « Proceedings of a Symposium, Mathematics Research Center at University of Wisconsin ». University of Wisconsin Press, 1960, Note n. 6, Madison.

[2] IU. M. BEREZANSKI, *O kraevyh zadačah dlea obščih differentzial'nyh operatorov v častnyh proizvodnyh*. (*Sui problemi al contorno per gli operatori differenziali generali a derivate parziali*), « Doklady Akad. Nauk SSSR » (122), 6, pp. 959–952 (1958).

[3] D. MANGERON, *Sopra un problema al contorno per un'equazione differenziale alle derivate parziali di quarto ordine con le caratteristiche reali doppie*, « Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. », Napoli (4), II, pp. 1–11 (1932).

[4] D. MANGERON, *Sur les problèmes à la frontière pour une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur*, « C. R. Acad. Sci », Paris, 207, pp. 94–96; 544–546; 1022–1024 (1937).

[5] F. MANARESI, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », XXIII, pp. 163–213 (1954).

[6] D. MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone* (*A Mauro Picone nel suo 75° compleanno*), « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », Cl. Sci. fis., mat. e nat. (8), XXXI, 1–2, pp. 27–32 (1961).

[7] D. MANGERON e L. E. KRIVOCHEINE, *Sur quelques problèmes d'approximation relatifs à une nouvelle classe d'équations intégro-différentielles*, « Bull. Acad. Polonaise Sci. », Série sci. math., astr. et phys., IX, 10, pp. 707–712 (1961).

[8] M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, « Ann. Sci. de l'Univ., Jassy », I Section (Math., Phys., Chimie), XXVI, 1, pp. 183–232 (1940).

[9] A. F. IPATOV, *Otzenka pogrešnosti i poreadok probliženia funktzii dvuh peremennyh polinomami S. N. Bernsteina* (*Valutazione dell'errore e l'ordine di approssimazione delle funzioni in due variabili tramite polinomi di S. N. Bernstein*), « Uč. zap. Petrozavodskogo un-ta » (4), *4*, 31–48; 49–58 [1955 (1957)].

[10] S. VASILACHE, *O novyh kraevyh zadačah dlea nekotoryh integro–differentzial'nyh uravnenii ili uravnenii v častnyh proizvodnyh* (*Sopra alcuni nuovi problemi al contorno per certe equazioni integro–differenziali o a derivate parziali*), « Rev. math. pures et appl. », Bucarest (5), *2*, 251–274 (1960).

[11] D. D. STANCU, *Sur l'approximation par des polynômes du type de Bernstein des fonctions de deux variables*, « Comunic. Acad. RPR » (9), *8*, pp. 773–777 (1959).

[12] D. D. STANCU, *O nekotoryh mnogočlenah dvuh peremennyh tipa Bernsteina i nekotoryh ih primeneniah* (*Sopra alcuni polinomi in due variabili del tipo di Bernstein e alcune applicazioni*), « Dokl. ANSSSR » (134), *1*, 48–51 (1960).

[13] IA. V. BYKOV, *O nekotoryh metodah postroenia rešenii integral'nyh i integro–differentzial'nyh uravnenii* (*Sopra alcuni metodi di risoluzione delle equazioni integrali e integro–differenziali*), « Accad. Nauk Kirg. SSR », Frunze 1961, 110 pp.

[14] L. E. KRIVOŠEIN, *Issledovania po integro–differentzial'nym uravneniam v Kirgizkom Gos. Universitete* (*Ricerche concernenti equazioni integro–differenziali nell'Università di Kirgizia*), « Materialy 10–i naučnoi konferentzii professorsko–prepodavatel'skogo sostava fiz.–mat. fak. (sektzia mat.) », Frunze 1961, pp. 3–13.

[15] D. MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno*, « Bul. Inst. politehn. Iași, » (12), *8*, s. n., 1–2 (1962) (in stampa).

[16] D. MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN, *Calcolo per approssimazione tramite polinomi polidimensionali del tipo di Bernstein delle soluzioni di una classe di problemi al contorno concernenti le equazioni integro–differenziali a derivate parziali*, « Rev. math. pures et appl. », Bucarest (7), *4* (1962) (in stampa).