Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Rosati

Sui coefficienti di Laguerre-Stieltjes di una funzione non decrescente

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.3, p. 299–305.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_3_299_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Analisi matematica. — *Sui coefficienti di Laguerre–Stieltjes di una funzione non decrescente* (*). Nota di FRANCESCO ROSATI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. POSIZIONE DEL PROBLEMA. – In questa Nota, attraverso una opportuna modifica del classico problema dei momenti di Stieltjes [1] (1), si dànno le condizioni necessarie e sufficienti affinché un'assegnata successione di numeri reali $\{c_k\}$, sia quella dei coefficienti di Laguerre–Stieltjes

$$(1.1) \qquad c_k = \frac{1}{(k!)^2} \int_0^{+\infty} e^{-x} \, L_k(x) \, d\alpha(x) \,, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots),$$

di una funzione $\alpha(x)$ non decrescente in $[0, +\infty]$, avendo indicato con $L_k(x)$ i polinomi di Laguerre definiti da

$$(1.2) \qquad L_k(x) = e^x \frac{d^k}{dx^k}(x^k e^{-x}) = (k!)^2 \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(l!)^2} \frac{x^l}{(k-l)!} \,, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Accanto ai coefficienti (1.1) conviene considerare questi altri $\{\mu_l\}$ definiti da

$$(1.3) \qquad \mu_l = (l!)^2 \cdot \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \frac{c_k}{(l-k)!} \,, \qquad (l = 0, 1, 2, \cdots),$$

per cui risulta pure

$$(1.4) \qquad c_k = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(l!)^2} \frac{\mu_l}{(k-l)!} \,, \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Con i numeri $\{\mu_l\}$ definiti da (1.3) formiamo i seguenti determinanti

$$(1.5) \qquad D_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} \,, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

e successivamente questi altri:

$$(1.6) \qquad D'_n = \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_2 & \mu_3 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} \end{vmatrix} \,, \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

Ciò premesso sussiste il seguente teorema:

(*) Lavoro del gruppo di ricerca N. 22 del C.N.R. eseguito presso l'Istituto Nazionale per le applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1962.

(1) I numeri posti tra [ ] si riferiscono alla bibliografia posta in fine.

TEOREMA I. – *Condizione necessaria e sufficiente affinché una data successione* $\{c_k\}$ *di numeri reali, sia la successione dei coefficienti di Laguerre-Stieltjes di una funzione* $\alpha(x)$ *non decrescente, è che, costruita la corrispondente successione* $\{\mu_l\}$ *definita da* (1.3), *le due successioni di determinanti*

$$D_0, D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots,$$

$$D'_1, D'_2, \cdots, D'_n, \cdots,$$

godano di una delle due seguenti proprietà:

A) *siano formati da numeri tutti positivi;*

B) *esista un intero positivo* N *tale da aversi:*

$$D_0 > 0 \;,\; D_1 > 0 , \cdots , D_{N-1} > 0 \;,\; D_N = D_{N+1} = D_{N+2} = \cdots = 0 ,$$

$$D'_1 > 0 , \cdots , D'_{N-1} > 0 \;,\; D'_N \geq 0 \;,\; D'_{N+1} = D'_{N+2} = \cdots = 0 .$$

La dimostrazione del teorema seguirà da quanto esposto nei successivi n. 2 e 3. Rileviamo ora che, indicata con $\alpha(x)$ una soluzione del problema (1.1) che abbia valore assegnato in un punto di $[0, +\infty]$, per esempio $\alpha(0) = 0$, il teorema I può essere ulteriormente precisato come segue. Nel *caso* A) *il problema è indeterminato*, cioè può avere più di una soluzione, ma tra esse non c'è alcuna funzione a scala con un numero finito di salti; nel *caso* B) *il problema è determinato*, e l'unica sua soluzione è una funzione a scala con N salti, di cui il primo cade in un punto $\xi_1 > 0$ se $D'_N > 0$, in $\xi_1 = 0$ se $D'_N = 0$.

Senza scapito di generalità abbiamo supposto $\alpha(0) = 0$; se ciò non fosse, posto $\alpha(0) = c$, basterebbe considerare la $\alpha_1(x) = \alpha(x) - c$, ovviamente non decrescente, per ridursi al caso considerato. Nel corso della dimostrazione del Teorema I del n. 3, si vedrà come in luogo di assegnare il valore di $\alpha(x)$ in $x = 0$, lo si poteva assegnare in un qualsiasi punto di $[0, +\infty]$.

2. EQUIVALENZA COL PROBLEMA GENERALIZZATO DEI MOMENTI. – Onde pervenire alla dimostrazione del teorema del numero precedente, premettiamo il seguente teorema che muta il problema definito in (1.1) in uno equivalente.

TEOREMA I. – *Tutte e sole le soluzioni* $\alpha(x)$ *del problema* (1.1) *sono pure soluzioni di quello determinato da*

$$\mu_l = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^l \, d\alpha(x), \qquad (l = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.1}$$

con la $\{\mu_l\}$ *definita da* (1.3).

Dimostrazione. – Se $\alpha(x)$ verifica le (1.1), tenuto conto di (1.2) e (1.4), si ha, per $k = 0, 1, 2 \cdots$,

$$\sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(k-l)!} \frac{\mu_l}{(l!)^2} = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(k-l)!} \frac{x^l}{(l!)^2} \, d\alpha(x) = \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{(k-l)!} \frac{1}{(l!)^2} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^l \, d\alpha(x)$$

e quindi per ogni intero $l \geq 0$ deve essere $\mu_l = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^l \, d\alpha(x)$ cioè debbono valere le (2.1). Viceversa se $\alpha(x)$ verifica le (2.1), osservato che si può scrivere

$$x^l = (l!)^2 \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k}{(l-k)!} \frac{L_k(x)}{(k!)^2}, \qquad (l = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.2}$$

e tenuto conto delle (1.3), risulta

$$(l!)^2 \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \frac{c_k}{(l-k)!} = (l!)^2 \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k}{(l-k)!} \cdot \frac{1}{(k!)^2} \int_0^{+\infty} e^{-x} L_k(x)\, d\alpha(x),$$

onde per l'arbitrarietà dell'intero $l \geq 0$, valgono le (1.1) e quindi la tesi.

Al problema definito da (2.1) daremo il nome di problema generalizzato dei momenti, o dei momenti rispetto alla funzione peso e^{-x} nell'intervallo $[0 + \infty]$.

In luogo del problema (2.1) equivalente a (1.1) ne risolveremo uno che lo comprende e che può essere utile per lo studio di problemi dei momenti rispetto funzioni peso che non siano necessariamente e^{-x}; vedi per es. il n. 4.

3. IL PROBLEMA GENERALIZZATO DEI MOMENTI. – Data una successione di numeri reali $\{b_k\}$, si vogliono determinare le condizioni necessarie e sufficienti, perché esista in $[0, +\infty]$, una funzione non decrescente tale che risulti

$$b_k = \int_0^{+\infty} x^k g(x)\, d\beta(x), \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{3.1}$$

essendo $g(x) \in C[0, +\infty]$ una funzione assegnata in modo che $g(x) > 0$ per $x \in (0, +\infty)$, potendo anche essere infinitesima od infinita nei punti estremi [2].

Costruite due successioni di determinati $\{\mathfrak{D}_n\}$, $\{\mathfrak{D}'_n\}$ del tipo (1.5) e (1.6), con i numeri b_k assegnati

$$\mathfrak{D}_n = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n+1} & \cdots & b_{2n} \end{vmatrix}, \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{3.2}$$

$$\mathfrak{D}'_n = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & b_{n+1} & \cdots & b_{2n-1} \end{vmatrix}, \qquad (n = 1, 2, \cdots), \tag{3.3}$$

si ha il seguente teorema:

TEOREMA I. – *Condizione necessaria e sufficiente perché, per una assegnata successione di numeri reali* $\{b_k\}$, *esista in* $[0, +\infty]$ *una funzione non*

(2) In particolare potrebbe essere $g(0) > 0$.

decrescente $\beta(x)$, *tale che valgano le* (3.1), *è che le due successioni di determinanti* $\{\mathfrak{D}_n\}$ *e* $\{\mathfrak{D}'_n\}$, *godano di una delle seguenti proprietà:*

A) *siano formati da numeri tutti positivi,*

B) *esista un intero positivo* N *tale da aversi*

$$\mathfrak{D}_0 > 0 \,, \quad \mathfrak{D}_1 > 0 , \cdots , \mathfrak{D}_{N-1} > 0 \,, \quad \mathfrak{D}_N = \mathfrak{D}_{N+1} = \mathfrak{D}_{N+1} = \cdots = 0 ,$$

$$\mathfrak{D}'_1 > 0 , \qquad , \mathfrak{D}'_{N-1} > 0 \,, \quad \mathfrak{D}'_N \geq 0 \,, \quad \mathfrak{D}'_{N+1} = \mathfrak{D}'_{N+2} = \cdots = 0 .$$

Assegnato che sia il valore di $\beta(x)$ *in un punto* $a \in (0 + \infty)$ *si ha che* (3) *nel caso* A) *il problema può avere più di una soluzione, ma tra esse non vi è alcuna funzione a scala con un numero finito di salti; nel caso* B) *il problema è determinato e l'unica sua soluzione è data da una funzione a scala con* N *salti, dei quali il primo è in un punto* $\xi_1 > 0$ *se* $\mathfrak{D}'_N > 0$ *in* $\xi_1 = 0$ *se* $\mathfrak{D}'_N = 0$.

Dimostrazione. – La condizione è necessaria. Osserviamo che dato il segno di $g(x)$ e la non decrescenza di $\beta(x)$ supposta esistente, le (3.1) possono scriversi

$$b_k = \int_0^{+\infty} x^k g(x)\, d\beta(x) = \lim_{\substack{\Lambda \to +\infty \\ \lambda \to 0}} \int_\lambda^\Lambda x^k g(x)\, d\beta(x) = \lim_{\substack{\Lambda \to +\infty \\ \lambda \to 0}} \int_\lambda^\Lambda x^k\, dF(x) = \int_0^{+\infty} x^k\, dF(x),$$

avendo posto (4)

$$F(x) = c + \int_a^x g(x)\, d\beta(x). \tag{3.4}$$

È ovvio che risulta $F(x)$ non decrescente in $[0 + \infty]$; ne segue che i $\{b_k\}$ sono i momenti ordinari della $F(x)$ in $[0, +\infty]$ e per i determinanti (3.2), (3.3), formati con essi dovrà necessariamente risultare uno dei due casi del teorema. Basta osservare che se $\beta(x)$ è a scala con N salti, $p_1, p_2, \cdots, p_N$, nei punti $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$, tale è pure la $F(x)$, con salti $q_1, q_2, \cdots, q_N$ nei medesimi punti, ove è posto $q_i = p_i g(\xi_i)$. Se invece $\beta(x)$ non ha un numero finito di salti, tale risulta anche la $F(x)$. In entrambi i casi la teoria del classico problema dei momenti (vedi [1]) porta alla tesi.

La condizione è sufficiente. Infatti non appena i $\{b_k\}$ sono tali che i $\{\mathfrak{D}_i\}$ e $\{\mathfrak{D}'_i\}$ verificano le ipotesi A) o B) del teorema, è sempre possibile (vedi [3]) risolvere il seguente problema dei momenti

$$b_k = \int_0^{+\infty} x^k\, d\psi(x) , \qquad (k = 0 , 1 , \cdots) , \tag{3.5}$$

con $\psi(x)$ non decrescente e $\psi(0) = 0$, potendo essere la $\psi(x)$ indeterminata nel caso A), però non fatta a scala con un numero finito di salti, oppure

(3) Se $0 < g(0) < +\infty$ si può anche prendere $a = 0$.

(4) Vedi per esempio [2].

determinata a scala con N salti nel caso B) il primo in $\xi_1 > 0$ se $\mathfrak{D}'_N > 0$, in $\xi_1 = 0$ se $\mathfrak{D}'_N = 0$.

Rispetto tale $\psi(x)$ esiste allora il seguente integrale

$$\beta(x) = c + \int_a^x g(t)^{-1}\, d\psi(t), \tag{3.6}$$

che definisce una $\beta(x)$ non decrescente, indeterminata o determinata se tale è la $\psi(x)$, con gli eventuali salti nei medesimi punti ξ_i, e con i pesi $p_i = \frac{q_i}{g(\xi_i)}$, ove q_i indicano i pesi eventuali della $\psi(x)$; se a scala tale è $\beta(x)$.

Poiché risulta per $\lambda \leq \Lambda$

$$0 \leq \int_\lambda^\Lambda x^k g(x)\, d\beta(x) = \int_\lambda^\Lambda x^k\, d\psi(x) \leq \int_0^{+\infty} x^k\, d\psi(x) = b_k,$$

per ogni valore di k, ed esiste finito il limite per $\lambda \to 0$, $\Lambda \to +\infty$, dell'integrale a secondo membro, dovrà esistere anche quello del primo membro con il medesimo valore, esiste dunque $\int_0^{+\infty} x^k g(x)\, d\beta(x)$, per ogni valore di k e si ha

$$\int_0^{+\infty} x^k\, d\psi(x) = \int_0^{+\infty} x^k g(x)\, d\beta(x). \tag{3.7}$$

Confrontando il risultato ottenuto con la (3.5) ne segue che la $\beta(x)$ definita da (3.6) è certo soluzione del problema (3.1), e per le proprietà sopra richiamate, derivanti da quelle della $\psi(x)$, essa verifica le condizioni A) e B) del teorema che risulta quindi completamente dimostrato.

Si può ora osservare a spiegazione della nota [3], che se $0 < g(x) < +\infty$, la (3.6) può sostituirsi con la

$$\beta(x) = c + \int_0^x g(t)^{-1}\, d\psi(t), \tag{3.6'}$$

o, se si vuole, con la

$$\beta(x) = \int_0^x g(t)^{-1}\, d\psi(t). \tag{3.6''}$$

Torniamo ora al problema definito da (1.1). Il teorema fondamentale ad esso relativo risulta immediatamente dimostrato, non appena si tenga conto del teorema di equivalenza stabilito al n. 2, e si risolva il problema dei momenti con peso e^{-x} definito da (2.1). Ciò è immediato non appena nei risultati stabiliti al teorema I di questo paragrafo si ponga $g = e^{-x}$ e si adotti la forma (3.6'') per la costruzione della soluzione. Tutto ciò, come è ovvio, dopo aver precisato che i $\{b_k\}$ dati per il teorema I, vanno sostituiti con i $\{\mu_l\}$ dati da (1.3).

4. COEFFICIENTI DI LAGUERRE–STIELTJES GENERALIZZATI. – Tenuto conto dei risultati ottenuti nel paragrafo precedente, si può immediatamente risolvere, per ogni numero reale $\nu > -1$, il seguente problema che diremo di Laguerre–Stieltjes generalizzato. Assegnata una successione di numeri reali $\{C_k^{(\nu)}\}$ si richiedono condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una funzione non decrescente $\gamma^{(\nu)}(x)$ tale che risulti

$$C_k^{(\nu)} = \frac{1}{\Gamma(\nu+k+1)\cdot k!}\int_0^{+\infty} x^{\nu/2}\, e^{-x/2}\, L_k^{(\nu)}(x)\, d\gamma^{(\nu)}(x), \qquad (k=0,1,2,\cdots), \tag{4.1}$$

ove con

$$L_k^{(\nu)}(x) = x^{-\nu} e^x \frac{d^k}{dx^k}(x^{k+\nu} e^{-x}) = k!\,\Gamma(\nu+k+1)\sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l x^l}{(k-l)!\,\Gamma(\nu+l+1)\,l!}, \tag{4.2}$$

si sono indicati i polinomi di Laguerre generalizzati di ordine $\nu > -1$.

Rispetto al problema studiato al n. 1 vanno apportate alcune modifiche formali. In luogo delle (1.3) si introducono le

$$\mu_l^{(\nu)} = \Gamma(l+\nu+1)\,l!\sum_{k=0}^{l}(-1)^k\frac{C_k^{(\nu)}}{(l-k)!}, \qquad (l=0,1,2,\cdots), \tag{4.3}$$

e parimenti, in luogo delle (1.4), le

$$C_k^{(\nu)} = \sum_{l=0}^{k}\frac{(-1)^l \mu_l^{(\nu)}}{\Gamma(\nu+l+1)\,l!\,(k-l)!}, \qquad (k=0,1,2,\cdots). \tag{4.4}$$

I determinanti (1.5), (1.6) sono sostituiti dagli analoghi formati con i $\mu_l^{(\nu)}$ in luogo dei μ_l definiti da (1.3). Ciò fatto il problema con procedimento analogo a quello seguito al n. 2 è ridotto a quello equivalente dato da

$$\mu_l^{(\nu)} = \int_0^{+\infty} x^{\nu/2}\, e^{-x/2}\, x^l\, d\gamma^{(\nu)}(x), \qquad (l=0,1,2,\cdots), \tag{4.5}$$

per il quale valgono tutte le ipotesi ed i risultati stabiliti al n. 3, per il problema generalizzato dei momenti, non appena si ponga $g = e^{-x/2}\, x^{\nu/2}$, In dette circostanze si ha per il problema in esame un risultato formalmente identico a quello del teorema I del n. 3 e quindi al teorema I del n. 1, ciò che per brevità rinunciamo a riportare completamente. Interessa rilevare solo che in condizioni di validità dei citati teoremi la soluzione $\gamma^{(\nu)}(x)$ del problema (4.1) ha la forma

$$\gamma^{(\nu)}(x) = c + \int_a^x t^{-\nu/2}\, e^{t/2}\, dF^{(\nu)}(t), \tag{4.6}$$

ove la $F^{(\nu)}(x)$ indica al solito la soluzione del problema classico dei momenti

$$\mu_l^{(\nu)} = \int_0^{+\infty} x^l\, dF^{(\nu)}(x), \qquad (l=0,1,2,\cdots), \tag{4.7}$$

certo esistente per le ipotesi fatte nei citati teoremi. È utile ricordare che detta $\gamma^{(\nu)}(x)$ risulta determinata o meno tutte le volte che tale è la $F^{(\nu)}(x)$.

Si osservi che nel caso particolare $\nu = 0$ le (4.1) si riducono a

$$C_k = \frac{1}{(k!)^2} \int_0^{+\infty} e^{-x/2} L_k(x) \, d\gamma(x), \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{4.8}$$

che dà luogo ad un problema che diremo ancora di Laguerre–Stieltjes, anche se esso è formulato con una funzione peso diversa da quella che figura in (1.1). In quanto precede abbiamo sempre tralasciato di esporre i procedimenti per la costruzione effettiva della soluzione dei problemi in esame a partire dalla successione dei coefficienti assegnati. Dato che è stato indicato il procedimento per passare dal problema classico dei momenti a quello generalizzato, poiché e nota la teoria per costruire la soluzione del primo problema a partire dai coefficienti, ci è sembrato inutile riportarla in questo lavoro. Parimenti per lo stesso motivo abbiamo rinunciato ad un più profondo esame dei casi di indeterminazione. Per tutto ciò si può rinviare ai già citati [1] e [3].

BIBLIOGRAFIA.

[1] J. A. SHOHAT and J. D. TAMARKIN, *The problem of moments*, « Am. Math. Soc. » (1943).
[2] N. GUNTHER, *Sur les intégrales de Stieltjes*, Chelsea Publ. Comp., New York (1949).
[3] A. GHIZZETTI, *Sul problema dei momenti*, « Rend. Sem. Mat. », Torino, vol. 8, pp. 94–101 (1949).