ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ALDO GHIZZETTI

Sulle formule di quadratura relative ad intervalli illimitati. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.3, p. 290–298.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_3_290_0¿

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Sulle formule di quadratura relative ad intervalli illimitati* (*). Nota I di ALDO GHIZZETTI, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

In un precedente lavoro [1] ho indicato un procedimento generale per costruire formule di quadratura relative ad intervalli limitati. Mi propongo in questa Nota di estendere tale procedimento al caso di integrali su intervalli illimitati. Per fissare le idee mi riferirò al caso dell'intervallo $(a, +\infty)$; per $(-\infty, +\infty)$ si potrà procedere in modo del tutto analogo e mi limiterò pertanto ad enunciare il risultato finale.

In questa Nota son dati soltanto i teoremi generali, senza la costruzione di esempi particolari e senza lo studio delle questioni di convergenza (cfr. [2]). Di questi ulteriori compiti si stanno attualmente occupando alcuni ricercatori del Gruppo di Ricerca n. 22 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

1. ALCUNI RICHIAMI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI. – Sia

$$\text{(1,1)} \qquad E = \sum_{h=0}^{n} a_h(x) \frac{d^{n-h}}{dx^{n-h}}$$

un operatore differenziale lineare di ordine $n \geq 1$, con $a_0(x) \equiv 1$ e $a_h(x)$ di classe $n-h$ in $(a, +\infty)$. Considerato il suo *operatore aggiunto*

$$\text{(1,2)} \qquad E^* = \sum_{h=0}^{n} (-1)^{n-h} \frac{d^{n-h}}{dx^{n-h}} a_h(x),$$

per ogni coppia di funzioni $u(x), v(x)$, ciascuna dotata di derivata $(n-1)$–esima assolutamente continua, sussiste quasi ovunque l'*identità di Green–Lagrange*

$$\text{(1,3)} \qquad vE(u) - uE^*(v) = \frac{d}{dx} \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v),$$

dove si sono introdotti questi altri operatori

$$\text{(1,4)} \qquad E^*_k = \sum_{h=0}^{k} (-1)^{k-h} \frac{d^{k-h}}{dx^{k-h}} a_h(x), \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Detto $\{y_1(x), \cdots, y_n(x)\}$ un sistema fondamentale di integrali dell'equazione $E(u) = 0$, associamo ad esso il sistema di funzioni $\{z_1(x), \cdots, z_n(x)\}$

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 10 marzo 1962.

univocamente determinato dal sistema di equazioni lineari

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{(h)} z_i = \delta_{h,n-1}, \qquad (h = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{1,5}$$

È ben noto che $\{z_1(x), \cdots, z_n(x)\}$ è un sistema fondamentale di integrali dell'equazione aggiunta $E^*(v) = 0$ e che, considerate le due equazioni differenziali

$$E(u) = f(x) \quad , \quad E^*(v) = g(x), \tag{1,6}$$

con $f(x)$ e $g(x)$ localmente sommabili in $(a, +\infty)$, i loro integrali generali possono esprimersi come segue:

$$\left\{\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^{n} y_i(x)\left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi) f(\xi)\, d\xi\right], \\ v(x) &= \sum_{i=1}^{n} z_i(x)\left[\beta_i - \int_a^x y_i(\xi) g(\xi)\, d\xi\right], \end{aligned}\right. \tag{1,7}$$

con α_i, β_i costanti arbitrarie, avendosi inoltre

$$\left\{\begin{aligned} u^{(h)}(x) &= \sum_{i=1}^{n} y_i^{(h)}(x)\left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi) f(\xi)\, d\xi\right], \\ E^*_{n-h-1}(v) &= \sum_{i=1}^{n} E^*_{n-h-1}(z_i)\left[\beta_i - \int_a^x y_i(\xi) g(\xi)\, d\xi\right] \\ &\qquad (h = 0, 1, \cdots, n-1). \end{aligned}\right. \tag{1,8}$$

Ricordiamo poi (vedi [3]) che sussistono le seguenti identità, comprendenti le (1,5):

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{(h)} E^*_{n-k-1}(z_i) = \delta_{hk}, \qquad (h, k = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{1,9}$$

Facciamo infine vedere che, come conseguenza di (1,9), si ha

$$\sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)} E^*_{n-h-1}(z_j) = \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n). \tag{1,10}$$

Infatti, indicato con λ_{ij} il primo membro di (1,10) e fissato l'indice i, si ha, per $r = 0, 1, \cdots, n-1$:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^{(r)} \lambda_{ij} = \sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)} \sum_{j=1}^{n} y_j^{(r)} E^*_{n-h-1}(z_j) = \sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)} \delta_{rh} = y_i^{(r)};$$

ciò prova evidente che $\lambda_{ij} = \delta_{ij}$, ossia la (1,10).

2. DUE TEOREMI PRELIMINARI. – Sia $\alpha(x)$ una funzione localmente sommabile in $(a, +\infty)$; per esprimere che l'integrale $\int_a^{+\infty} \alpha(x)\, dx$ è *convergente* [oppure *assolutamente convergente*] scriveremo $\alpha \in \mathrm{I}$ [oppure $\alpha \in \mathrm{L}$].

Supponiamo fissati, come nel n. 1, un operatore differenziale lineare E di ordine n, dotato di aggiunto E^* ed i due sistemi di integrali $\{y_i(x)\}$, $\{z_i(x)\}$ rispettivamente delle equazioni $\mathrm{E}(u) = 0$, $\mathrm{E}^*(v) = 0$.

Siano poi date in $(a, +\infty)$ due funzioni: $u(x)$ *dotata di derivata* $(n-1)$*-esima assolutamente continua* e $g(x)$ *localmente sommabile*, verificanti inoltre le seguenti ipotesi:

$$ug \in \mathrm{I}, \tag{2,1}$$

$$y_i g \in \mathrm{I} \quad , \quad z_i \mathrm{E}(u) \in \mathrm{I} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{2,2}$$

Dimostriamo il teorema seguente:

I. – *Siano* $u(x)$, $g(x)$ *due funzioni verificanti in* $(a, +\infty)$ *le ipotesi* (2,1), (2,2) *e sia* $v(x)$ *un arbitrario integrale dell'equazione differenziale* $\mathrm{E}^*(v) = g$. *Valgono allora le proprietà seguenti:*

α) *la funzione*

$$\varphi(x) = \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)} \mathrm{E}^*_{n-h-1}(v) \tag{2,3}$$

ammette un limite determinato e finito per $x \to +\infty$;

β) *si può scegliere, in uno ed un solo modo, l'integrale* $v(x)$ *in guisa che tale limite sia uguale a zero* [*per ogni* u];

γ) *si ha* $v\mathrm{E}(u) \in \mathrm{I}$ [*per ogni* v].

Dimostrazione. – In virtù delle (1,8) possiamo scrivere

$$u^{(h)}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i^{(h)}(x) \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi)\, \mathrm{E}(u)\, d\xi\right],$$

$$\mathrm{E}^*_{n-h-1}(v) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}^*_{n-h-1}(z_j) \left[\beta_j - \int_a^x y_j(\xi)\, g(\xi)\, d\xi\right],$$

$$(h = 0, 1, \cdots, n-1),$$

e quindi per la (2,3)

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi)\, \mathrm{E}(u)\, d\xi\right] \left[\beta_j - \int_a^x y_j(\xi)\, g(\xi)\, d\xi\right] \sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)}(x)\, \mathrm{E}^*_{n-h-1}(z_j),$$

ossia, ricordando la (1,10)

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha_i + \int_a^x z_i(\xi)\, \mathrm{E}(u)\, d\xi\right] \left[\beta_i - \int_a^x y_i(\xi)\, g(\xi)\, d\xi\right].$$

In virtù delle ipotesi (2,2) si ha dunque

$$(2,4)\qquad \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\left[\alpha_i+\int_a^{+\infty} z_i(\xi)\,\mathrm{E}(u)\,d\xi\right]\left[\beta_i-\int_a^{+\infty} y_i(\xi)\,g(\xi)\,d\xi\right]$$

e ciò prova l'affermazione α).

Se si vuole che il limite (2,4) valga zero (qualunque siano le α_i), occorre e basta ovviamente assumere come $v(x)$ quell'integrale della $\mathrm{E}^*(v)=g$ che corrisponde a

$$\beta_i=\int_a^{+\infty} y_i(\xi)\,g(\xi)\,d\xi\,,\qquad (i=1,2,\cdots,n),$$

cioè, ricordando (1,7), che è espresso da

$$(2,5)\qquad v(x)=\sum_{i=1}^{n} z_i(x)\int_x^{+\infty} y_i(\xi)\,g(\xi)\,d\xi\,.$$

Infine, per provare la proprietà γ) basta osservare che dalle (1,3) e (2,3) segue l'identità

$$\int_a^x v(\xi)\,\mathrm{E}(u)\,d\xi-\int_a^x u(\xi)\,g(\xi)\,d\xi=\varphi(x)-\varphi(a)\,,$$

la quale, esistendo finiti i due limiti $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x ug\,d\xi$ [per l'ipotesi (2,1)] e $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ [per dimostrazione precedente], permette di dedurre che esiste pure finito il limite $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x v\mathrm{E}(u)\,d\xi$, c.d.d.

In luogo delle (2,2) si sarebbero potute fare le ipotesi più restrittive:

$$(2,6)\qquad y_i g\in \mathrm{L}\quad,\quad z_i\,\mathrm{E}(u)\in\mathrm{L},\qquad (i=1,2,\cdots,n);$$

in tal caso però la (2,1) viene di conseguenza (anzi si ha addirittura $ug\in\mathrm{L}$), onde il teorema I può sostituirsi col seguente:

II. – *Siano* $u(x)\,,g(x)$ *due funzioni verificanti in* $(a\,,+\infty)$ *le ipotesi* (2,6) *e sia* $v(x)$ *un arbitrario integrale dell'equazione differenziale* $\mathrm{E}^*(v)=g$. *Si ha allora di conseguenza*

$$(2,7)\qquad ug\in\mathrm{L}\quad,\quad v\mathrm{E}(u)\in\mathrm{L}$$

e quindi valgono le proprietà α) *e* β) *del teorema I.*

Dimostrazione. – Dalle (1,7) segue

$$ug=\sum_{i=1}^{n} y_i g\left[\alpha_i+\int_a^x z_i\,\mathrm{E}(u)\,d\xi\right]\quad,\quad v\mathrm{E}(u)=\sum_{i=1}^{n} z_i\,\mathrm{E}(u)\left[\beta_i-\int_a^x y_i g\,d\xi\right]$$

e quindi, tenendo conto di (2,6)

$$| ug | \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \, | y_i g | \quad , \quad | v\mathrm{E}(u) | \leq \sum_{i=1}^{n} q_i \, | z_i \, \mathrm{E}(u) | \, ,$$

con le costanti p_i, q_i definite da

$$p_i = | \alpha_i | + \int_a^{+\infty} | z_i \, \mathrm{E}(u) | \, d\xi \quad , \quad q_i = | \beta_i | + \int_a^{+\infty} | y_i g | \, d\xi \, ;$$

da ciò, per le stesse (2,6), seguono le (2,7), c.d.d.

3. COSTRUZIONE DELLA FORMULA DI QUADRATURA SULL'INTERVALLO $(a, +\infty)$. – Vogliamo ricavare una formula di quadratura per l'integrale

$$\int_a^{+\infty} u(x) \, g(x) \, dx \, , \tag{3,1}$$

facendo sulle funzioni $u(x)$ e $g(x)$ le ipotesi qualitative dette nel n. 2 ed inoltre le ipotesi (2,1), (2,2) [oppure (2,6)], naturalmente in relazione ad un fissato operatore differenziale lineare E (di ordine n) dotato di aggiunto E*. Le predette ipotesi assicurano la convergenza [oppure l'assoluta convergenza, teorema II del n. 2] dell'integrale (3,1).

Fissiamo in $(a, +\infty)$ un numero arbitrario $m \geq 1$ di punti $x_1, x_2, \cdots, x_m$ in modo che sia

$$a = x_0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leq x_{m+1} = +\infty . \tag{3,2}$$

Dell'equazione differenziale $\mathrm{E}^*(v) = g$, consideriamo l'integrale $v_0(x)$ che è individuato dalle condizioni iniziali

$$v_0^{(h)}(a) = 0, \qquad (h = 0, 1, \cdots, n-1); \tag{3,3}$$

poi altri $m - 1$ integrali arbitrari $v_1(x), \cdots, v_{m-1}(x)$ ed infine quell'integrale che è definito dalla (2,5) e che indicheremo con $v_m(x)$.

Supponiamo dapprima $x_m < +\infty$ e sia $b > x_m$. Riprendiamo allora l'identità di Green–Lagrange (1,3), scrivendola

$$u\mathrm{E}^*(v) = -\frac{d}{dx} \sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)} \, \mathrm{E}^*_{n-h-1}(v) + v\mathrm{E}(u) . \tag{3,4}$$

In essa poniamo $v = v_i$, $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$, ed integriamone ambo i membri sull'intervallo (x_i, x_{i+1}), in modo da ottenere

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} ug \, dx = -\sum_{h=0}^{n-1} \left[u^{(h)} \, \mathrm{E}^*_{n-h-1}(v_i) \right]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i \, \mathrm{E}(u) \, dx \, , \tag{3,5}$$

$$(i = 0, 1, \cdots, m-1) ;$$

lo stesso facciamo sull'intervallo (x_m, b) assumendo $v = v_m$:

$$(3,6)\qquad \int_{x_m}^{b} ug\,dx = -\sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_m)]_{x_m}^{b} + \int_{x_m}^{b} v_m E(u)\,dx.$$

Sommando membro a membro le $m+1$ relazioni (3,5), (3,6), si ricava

$$(3,7)\qquad \int_a^b ug\,dx = -\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} [u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_m)]_{x_m}^{b}$$
$$+ \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\,dx + \int_{x_m}^{b} v_m E(u)\,dx.$$

Passando al limite per $\Gamma\ b \to +\infty$, ricordando le ipotesi fatte e le affermazioni β), γ) del teorema I del n. 2, si trova

$$(3,8)\qquad \int_a^{+\infty} ug\,dx = -\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} [u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_m)]_{x=x_m}$$
$$+ \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\,dx + \int_{x_m}^{+\infty} v_m E(u)\,dx.$$

Tenuto poi conto che per (3,3) si ha $[E^*_{n-h-1}(v_0)]_{x=x_0} = 0$, quest'ultima formula si trasforma subito nella

$$(3,9)\qquad \int_a^{+\infty} ug\,dx = \sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} u^{(h)}(x_i)\,[E^*_{n-h-1}(v_i - v_{i-1})]_{x=x_i} + \sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\,dx,$$
$$(\text{con } x_{m+1} = +\infty),$$

che fornisce la formula di quadratura cercata e che ha la medesima struttura di quella data nel lavoro [1] per integrali estesi ad intervalli limitati.

Supponiamo invece $x_m = +\infty$; allora è inutile la considerazione dell'integrale v_m e, fissato $b > x_{m-1}$, si scriverà in luogo di (3,7);

$$(3,7')\qquad \int_a^b ug\,dx = -\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-2} [u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \sum_{h=0}^{n-1} [u^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_{m-1})]_{x_{m-1}}^{b}$$
$$+ \sum_{i=0}^{m-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i E(u)\,dx + \int_{x_{m-1}}^{b} v_{m-1} E(u)\,dx,$$

deducendo poi, con un passaggio al limite per $b \to +\infty$ e ricordando le affermazioni α), γ) del teorema I del n. 2:

$$(3{,}8') \qquad \int_a^{+\infty} ug\,dx = -\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-2}[u^{(h)}\,E^*_{n-h-1}(v_i)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \sum_{h=0}^{n-1}[u^{(h)}\,E^*_{n-h-1}(v_{m-1})]_{x=x_{m-1}}$$

$$-\lim_{x\to+\infty}\sum_{h=0}^{n-1}u^{(h)}\,E^*_{n-h-1}(v_{m-1}) + \sum_{i=0}^{m-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i\,E(u)\,dx + \int_{x_{m-1}}^{+\infty} v_{m-1}\,E(u)\,dx\,,$$

vale a dire

$$(3{,}9') \qquad \int_a^{+\infty} ug\,dx = \sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{m-1} u^{(h)}(x_i)\,[E^*_{n-h-1}(v_i - v_{i-1})]_{x=x_i}$$

$$-\lim_{x\to+\infty}\sum_{h=0}^{n-1}u^{(h)}\,E^*_{n-h-1}(v_{m-1}) + \sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i\,E(u)\,dx\,, \qquad (\text{con } x_m = +\infty)\ ^{(1)}.$$

Questa formula (3,9') si può però far rientrare nella (3,9) scritta con $x_m = +\infty$. Infatti questa posizione $x_m = +\infty$ ha l'effetto di far comparire nella (3,9) i due termini

$$\sum_{h=0}^{n-1}[u^{(h)}\,E^*_{n-h-1}(v_m - v_{m-1})]_{x=+\infty} = -\sum_{h=0}^{n-1}[u^{(h)}\,E^*_{n-h-1}(v_{m-1})]_{x=+\infty}\,,$$

$$\int_{+\infty}^{+\infty} v_m\,E(u)\,dx = 0\,.$$

Va inoltre avvertito che, se $x_1 = a$, nelle due formule (3,9), (3,9') la considerazione dell'integrale v_0 diventa inutile, giacché è ovvio che i termini $u^{(h)}(x_1)\,[E^*_{n-h-1}(v_1 - v_0)]_{x=x_1}$ e $\int_{x_0}^{x_1} v_0\,E(u)\,dx$ risultano rispettivamente uguali a $u^{(h)}(a)\,[E^*_{n-h-1}(v_1)]_{x=a}$ e zero.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti nel seguente enunciato:

I. – *Fissati, nel modo sopraddetto, gli operatori differenziali lineari* E , E* *di ordine* n; *i punti* $x_1, x_2, \cdots, x_m$; *gli integrali* $v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}$ *dell'equazione differenziale* $E^*(v) = g$, *con* $g(x)$ *localmente sommabile, consideriamo in* $(a, +\infty)$, *assieme alla* $g(x)$, *un'altra funzione* $u(x)$ *dotata di derivata* $(n-1)$*-esima assolutamente continua. Se queste due funzioni verificano le ipotesi*

(1) In questa formula il passaggio al limite indicato deve essere eseguito globalmente sull'espressione $\sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)}\,E^*_{n-h-1}(v_{m-1})$; in generale non esisteranno separatamente i limiti di $u^{(h)}$ e di $E^*_{n-h-1}(v_{m-1})$.

(2,1) *e* (2,2) [*oppure l'ipotesi* (2,6)], *l'integrale* $\int_a^{+\infty} ug\,dx$ *risulta convergente* [*oppure assolutamente convergente*] *e sussiste per esso la seguente formula di quadratura*

$$\int_a^{+\infty} ug\,dx = \sum_{h=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} A_{hi}\,u^{(h)}(x_i) + R\,, \tag{3,10}$$

con

$$A_{hi} = [E^*_{n-h-1}(v_i - v_{i-1})]_{x=x_i}\,, \tag{3,11}$$

$$R = \sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i\,E(u)\,dx\,, \tag{3,12}$$

ove v_0 *denota quell'integrale della* $E^*(v) = g$ *che è individuato dalle condizioni iniziali nulle nel punto* $x = a$ *e* v_m *quello individuato dalle condizioni iniziali nulle nel punto* $x = +\infty$ [*cioè che è espresso da* (2,5)].

È evidente che la formula di quadratura (3,10) *risulta esatta* (*cioè riesce* $R = 0$) *quando* u *è un integrale dell'equazione differenziale* $E(u) = 0$.

Se $x_1 = a$ *è inutile la considerazione dell'integrale* v_0; *se* $x_m = +\infty$ *è inutile quella dell'integrale* v_m [*e la* (3,10) *va intesa nel senso specificato dalla* (3,9')].

Nelle ipotesi poste, la formula (3,10) è la più generale possibile perché il teorema I ammette un teorema inverso che si enuncia come segue:

II. – *Se le funzioni* $u(x)\,, g(x)$ *verificano le ipotesi dette nel teorema I e se sussiste una formula di quadratura del tipo* (3,10) *sotto la condizione che* $E(u) = 0$ *implichi* $R = 0$, *allora risultano univocamente determinati* $m - 1$ *integrali* $v_1\,, v_2\,, \cdots, v_{m-1}$ *dell'equazione differenziale* $E^*(v) = g$ *che, assieme ai due* $v_0\,, v_m$ *menzionati nel teorema I, permettono di esprimere i coefficienti* A_{hi} *ed il resto* R *nel modo indicato da* (3,11) *e* (3,12).

Dimostrazione. – La dimostrazione può compiersi con lo stesso ragionamento usato nel n. 4 del lavoro [1], con una sola variante nella conclusione. Precisamente, ripetendo tale ragionamento, si arriva a provare che sono univocamente determinati certi m integrali $v_1\,, v_2\,, \cdots, v_{m-1}\,, v_m$ della $E^*(v) = g$ in guisa che valgano le (3,11) ed inoltre la

$$R = \sum_{i=0}^{m}\int_{x_i}^{x_{i+1}} v_i\,E(u)\,dx - \lim_{x\to+\infty}\sum_{h=0}^{n-1} u^{(h)}\,E^*_{n-h-1}(v_m)\,. \tag{3,13}$$

Per concludere la dimostrazione occorre e basta far vedere che questo v_m è proprio l'integrale indicato nel teorema I [cioè quello espresso da (2,5)], giacché dopo ciò, per l'affermazione β) del teorema I del n. 2, si potrà affermare che il limite indicato in (3,13) vale zero e quindi che sussiste per R l'espressione (3,12).

Per ipotesi la $E(u) = 0$ deve implicare $R = 0$. Ne segue, ponendo nella (3,13) $u = y_i$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, che deve essere

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{h=0}^{n-1} y_i^{(h)} E^*_{n-h-1}(v_m) = 0 , \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) ; \tag{3,14}$$

d'altra parte si fa [cfr. (1,7)]

$$v_m = \sum_{j=1}^{n} z_j \left[\beta_j - \int_a^x y_j g \, d\xi \right]$$

con certi valori delle costanti β_j, onde, ricordando (2,3) e (2,4), si vede che il limite indicato in (3,14) risulta evidentemente uguale a

$$\beta_i - \int_a^{+\infty} y_i(\xi) g(\xi) \, d\xi .$$

Si ha dunque

$$\beta_i = \int_a^{+\infty} y_i(\xi) g(\xi) \, d\xi$$

e ciò prova che v_m è proprio l'integrale espresso da (2,5), c.d.d.