
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

ANTONIO GIÃO

Sur l'équation relativiste de l'énergie et l'hypothèse solaire de Piccardi

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 32 (1962), n.2, p.
181–184.*

Accademia Nazionale dei Lincei

http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_2_181_0i

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Astrofisica teorica. — *Sur l'équation relativiste de l'énergie et l'hypothèse solaire de Piccardi* (*). Nota di ANTONIO GIÃO, presentata (**) dal Corrisp. G. RIGHINI.

1. En Relativité générale l'équation de l'énergie n'est autre que l'équation du mouvement pour la coordonnée temporelle $x^4 = t$. Soient: ρ_0 la densité de masse propre, P la pression, τ le tenseur des efforts internes indépendants de la pression, $E_0 \equiv \rho_0 C^2 + P$ la densité d'énergie propre et ε_0^* l'intensité des sources d'énergie propre définie par:

$$\varepsilon_0^* = \frac{1}{E_0} \frac{d}{ds} (E_0 \delta\tau),$$

où $\delta\tau$ est un élément de volume spatial et d/ds l'opérateur invariant des variations individuelles, ds étant l'élément de ligne d'Univers.

L'équation relativiste du mouvement pour la coordonnée $x^4 = t$ est une conséquence de la conservation du tenseur de densité d'énergie-impulsion, propriété implicitement contenue dans les équations du champ métrique. Cette équation a la forme suivante:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ jk \end{matrix} \right\} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{1}{E_0} \left(g^{4i} \frac{\partial P}{\partial x^i} - \tau_{(o),k}^{4,k} \right) - \varepsilon_0^* \frac{dt}{ds}.$$

En prenant, en un point arbitraire de l'espace-temps, des coordonnées propres locales quasi-géodésiques $(x_o^1, x_o^2, x_o^3, t_o)$ l'équation précédente prend la forme suivante au pôle (A) de ces coordonnées:

$$(1) \quad \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 44 \end{matrix} \right\} = \frac{(g_{44})_o}{E_0} \left[g_{(o)}^{4i} \frac{\partial P}{\partial x_o^i} - \tau_{(o),k}^{4,k} \right] - \sqrt{(g_{44})_o} \varepsilon_0^*,$$

les $(g_{44})_o$ et $g_{(o)}^{ik}$ désignant les composantes du tenseur métrique en coordonnées x_o^j, t_o .

Considérons l'équation de continuité pour le courant de masse propre:

$$(2) \quad \frac{d\rho_0}{dt_o} = -\rho_0 \operatorname{div} \vec{V} + \rho_0 \varepsilon_0,$$

$\vec{V}$ étant la vitesse spatiale et ε_0 l'intensité des sources de masse propre définie par:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\delta m_o} \frac{d}{dt_o} (\delta m_o) \quad ; \quad \delta m_o = \rho_0 \delta\tau_o,$$

où δm_o désigne un élément de masse propre. En associant les équations (1) et (2) on obtient sans difficulté la relation:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 = & - \left(1 + \frac{P}{\rho_0 c^2} \right) \frac{1}{(g_{44})_o} \left[\frac{d}{dt_o} \left(\frac{1}{2} (g_{44})_o \right) + (g_{4j})_o \frac{d(g_{4j})_o}{dt_o} \right] - \\ & - \frac{P}{\rho_0 c^2} \operatorname{div} [\vec{V} + (g_4)_o] + \frac{1}{\rho_0 c^2} \left[\operatorname{div} (P g_4)_o - (g_{44})_o \tau_{(o),k}^{4,k} \right], \end{aligned}$$

(*) Lavoro eseguito nell'Osservatorio Astronomico dell'Università di Lisbona.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1962.

où $\vec{g}_4$ est le vecteur d'espace dont les composantes sont g_{41}, g_{42}, g_{43} . Nous allons appliquer cette équation dans un référentiel propre en rotation constante (vitesse angulaire $\vec{\omega}$). En remarquant d'une part que $g_{44} \approx c^2$ et d'autre part que l'on a alors ⁽¹⁾: $\vec{g}_4 = -\vec{\omega} \times \vec{r}$, on obtient la relation suivante:

$$\left[\epsilon_0 + \left(1 + \frac{P}{\rho_0 c^2} \right) \frac{1}{(g_{44})_0} \frac{d}{dt_0} \left(\frac{1}{2} (g_{44})_0 \right) \right] \rho_0 = \frac{1}{c^2} \left[\text{div} (P (g_4)_0) - (g_{44})_0 \mathfrak{T}_{(0),k}^{4,k} \right] - \frac{P}{c^2} \text{div} \vec{V}.$$

Prenons finalement une particule isolée (c'est-à-dire une particule sur la surface de laquelle P et $\mathfrak{T}$ s'annulent) et à volume constant. En intégrant la relation précédente dans le volume de la particule et en désignant par une barre les moyennes des différentes quantités (moyennes de masse) on obtient l'équation:

$$(3) \quad \bar{\epsilon}_0 = - \frac{1}{2 c^2} \frac{d}{dt_0} \overline{(g_{44})_0},$$

qui est une nouvelle forme de l'équation relativiste de l'énergie.

2. L'équation (3) a, sur la forme classique de l'équation relativiste de l'énergie (en coordonnées propres géodésiques), le grand avantage de mettre en évidence un fait dont l'importance est, selon nous, capitale. En effet, l'équation (3) montre que toute variation de l'énergie potentielle par unité de masse $(1/2 (g_{44})_0)$ de la particule s'accompagne nécessairement de sources non nulles de masse propre. Nous avons étudié ailleurs ⁽²⁾ quelques conséquences de cette propriété. Dans cette Note nous nous proposons de montrer que l'on peut déduire de (3) une justification complète de l'« hypothèse solaire » de Piccardi ⁽³⁾, en montrant que la variation annuelle du test D physico-chimique de Piccardi peut être expliquée par cette équation.

La fonction T de Piccardi ⁽³⁾ dans le test D peut être considérée ⁽²⁾ comme une fonction linéaire de $\epsilon_0^* - \epsilon_0$, c'est-à-dire:

$$(4) \quad T = 50 + a (\epsilon_0^* - \epsilon_0),$$

où a est une constante. Par suite du fait que ϵ_0^* représente, d'après notre théorie unitaire ⁽⁴⁾, l'action d'une solution tridimensionnelle ($\mathfrak{M}_3$) des équations du champ sur l'Univers physique quadridimensionnel $\mathfrak{M}_4$ ($\mathfrak{M}_3$ est une hypersurface de $\mathfrak{M}_4$), on peut supposer que ϵ_0^* est constant dans le temps mais spatialement variable, du moins pour des intervalles de temps qui restent petits par rapport à l'échelle cosmologique des phénomènes.

(1) A. GÍÃO, *Cinématique et dynamique de l'espace en rotation*, « Portugaliae Math. », 20, pp. 153-193 (1961).

(2) A. GÍÃO, *Comptes rendus du Symposium International sur les relations entre phénomènes solaires et terrestres*, Bruxelles 1960, Presses Académiques Européennes, pp. 139-158.

(3) G. PICCARDI, *questi « Rendiconti »*, 21, 84 (1956); 23, 419 (1957); 24, 427 (1958).

(4) A. GÍÃO, v. p. ex.: « J. de Phys. », 12, 31-40 et 99-106 (1951); « Phys. Rev. », 76, 764 (1949); « Portugaliae Math. », 17, 63 (1958).

En appliquant l'équation de l'énergie (3) à la relation (4) on obtient:

$$(5) \quad T = 50 + a\varepsilon_0^* + \frac{a}{2c^2} \frac{d}{dt_0} \overline{(g_{44})_0}.$$

Considérons un champ statique de Schwarzschild généralisé dont le ds^2 est donné par:

$$(6) \quad ds^2 = g_{44} dt^2 - \chi [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2],$$

où g_{44} et χ ne dépendent que des coordonnées spatiales. Lorsque ces coordonnées spatiales « isotropes » sont convenablement choisies, χ est le carré du rayon de courbure de la section spatiale locale de l'espace-temps. Au moyen d'une transformation générale de Lorentz on déduit de (6):

$$\begin{aligned} (g_{44})_0 &= (g_{44}) \left(\frac{\partial t}{\partial t_0} \right)^2 - \chi \sum_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial t_0} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} (g_{44} - \chi V^2) \approx \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) g_{44} - \chi V^2 \end{aligned}$$

et la relation (5) prend la forme:

$$T = 50 + a\varepsilon_0^* + \frac{a}{2c^2} \left[\left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) \vec{V} \cdot \nabla g_{44} - V^2 \vec{V} \cdot \nabla \chi - \left(\chi - \frac{g_{44}}{c^2} \right) \frac{dV^2}{dt_0} \right].$$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{q}$ les vecteurs unitaires des gradients ∇g_{44} et $\nabla \chi$ respectivement. On a alors:

$$(7) \quad T = 50 + a\varepsilon_0^* + \frac{a}{2c^2} \left[\left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) |\nabla g_{44}| \vec{V} \cdot \vec{u} - |\nabla \chi| V^2 \vec{V} \cdot \vec{q} + (1 - \chi) \frac{dV^2}{dt_0} \right],$$

où nous avons posé $g_{44} \approx c^2$ dans le coefficient de dV^2/dt_0 .

Supposons maintenant que les champs de g_{44} et de χ , dans la formule de Schwarzschild généralisée (6), ont les mêmes iso-surfaces. C'est là une condition qui est satisfaite aussi par les quantités correspondantes dans la formule de Schwarzschild classique.

En posant:

$$\begin{aligned} A_1 &= 50 + a\varepsilon_0^* & ; & \quad A_2 = \frac{a}{2c^2} |\nabla g_{44}|, \\ A_3 &= -\frac{a}{2c^2} |\nabla \chi| & ; & \quad A_4 = \frac{a}{2c^2}, \end{aligned}$$

la formule (7) devient:

$$(8) \quad T = A_1 + A_2 \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) \vec{V} \cdot \vec{u} + A_3 V^2 \vec{V} \cdot \vec{u} + A_4 (1 - \chi) \frac{dV^2}{dt_0}.$$

Il est naturel d'admettre que les champs galactiques de ∇g_{44} et de $\nabla \chi$ sont dirigés vers le centre galactique. Soit α l'angle des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{u}$. On a alors:

$$T = A_1 + \left[A_2 \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) + A_3 V^2 \right] V \cos \alpha + A_4 (1 - \chi) \frac{dV^2}{dt_0}.$$

Comme g_{44} et χ sont des champs à grande échelle, leurs gradients peuvent évidemment être considérés comme constants dans la région galactique

traversée par la Terre. Par conséquent:

$$A_4 \chi = A_4 \chi_0 + K A_3 (r - r_0),$$

où r est la distance au centre galactique et r_0 cette distance à l'instant initial arbitraire. On obtient ainsi finalement:

$$(9) \quad T = A_1 + \left[A_2 \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) + A_3 V^2 \right] V \cos \alpha + [A_4 (1 - \chi_0) - K A_3 (r - r_0)] \frac{dV^2}{dt_0}.$$

Cette formule fait intervenir, en un point quelconque, les six paramètres constants $A_1, A_2, A_3, A_4, \chi_0, k$. Leurs valeurs peuvent évidemment être déterminées de manière à obtenir des valeurs théoriques de T en coïncidence avec la courbe adoucie des observations pour six époques différentes de l'année (par exemple, les époques des minima et maxima principaux et secondaires et les époques où $T = 50$). L'aspect le plus important de ce résultat est le fait qu'il prouve la possibilité d'expliquer les grands traits de la variation annuelle de T dans le test D, *même quand le champ a les propriétés très simples du tenseur métrique du ds^2 de Schwarzschild généralisé* (6).

3. Soient $\vec{V}_S$ la vitesse du Soleil par rapport aux axes galactiques de (6), V_R le module de la vitesse de la Terre sur son orbite autour du Soleil (en supposant, pour simplifier, que cette orbite est circulaire), Ω la vitesse angulaire de ce mouvement, $\vec{k}_x$ et $\vec{k}_y$ les vecteurs unitaires d'axes x et y définissant la position de la Terre sur son plan orbital. La vitesse $\vec{V}$ de la Terre par rapport aux axes galactiques est alors donnée par:

$$\vec{V} = \vec{V}_S - V_R (\vec{k}_x \sin \Omega t - \vec{k}_y \cos \Omega t),$$

en choisissant convenablement l'origine arbitraire du temps. On déduit immédiatement de cette expression les fonctions $\vec{V} \cdot \vec{u}$ et $V^2 \vec{V} \cdot \vec{u}$, qu'il est inutile d'écrire ici explicitement.

Négligeons alors, dans la formule (8), le terme en dV^2/dt_0 qui est plus petit que les autres, par suite de $\chi \approx 1$. On obtient dans ces conditions une formule de la forme:

$$(10) \quad T = B_1 + B_2 \sin \Omega t + B_3 \cos \Omega t + B_4 \sin^2 \Omega t + B_5 \sin (2 \Omega t),$$

le constantes B étant évidemment des fonctions bien définies de $V_S, V_R, \vec{V}_S \cdot \vec{u}, \vec{k}_x \cdot \vec{u}, \vec{k}_y \cdot \vec{u}$ et Ω . On voit donc que la variation de T est le résultat de la superposition d'une variation annuelle et d'une variation semi-annuelle. C'est cette dernière qui produit le minimum secondaire de la courbe de la variation annuelle normale de T dans le test D. En calculant B_5 on trouve:

$$B_5 = -A_3 V_R^2 [(\vec{V}_S \cdot \vec{k}_y) u_x + (\vec{V}_S \cdot \vec{k}_x) u_y].$$

Cette relation montre que la variation semi-annuelle est due essentiellement au fait que la vitesse $\vec{V}_S$ du Soleil dans la galaxie n'est pas dirigée vers le centre galactique.