Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Israel Nathan Herstein

Sugli anelli soddisfacenti ad una condizione di Engel

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.2, p. 177–180.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_2_177_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Matematica. — *Sugli anelli soddisfacenti ad una condizione di Engel* (*). Nota di ISRAEL N. HERSTEIN, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

In un anello R arbitrario, presi due elementi a e b qualsiasi, definiremo, come al solito, il commutatore ed i successivi commutatori di a e b assumendo:

$$[a , b]_1 = ab - ba \quad , \quad [a , b , b]_2 = [a , b]_1 b - b [a , b]_1 , \cdots .$$

Questi verranno rispettivamente denominati il primo, il secondo, ecc. commutatore di a e b.

Si dice che l'anello R *soddisfa ad una condizione di Engel* quando scelti comunque a e b in R esiste un intero $n = n(a , b)$ (dipendente da a e b) tale che l'n-esimo commutatore di a e b si annulli, $[a , b , \cdots , b]_n = 0$.

Diremo poi che R *soddisfa ad una condizione fissa di Engel* quando esista un intero fisso n in corrispondenza al quale valga la $[a , b , \cdots , b]_n = 0$ per tutti gli a , b di R

Ci proponiamo di descrivere il comportamento degli elementi nilpotenti degli anelli soddisfacenti ad una condizione di Engel. Fissare la nostra attenzione su tali elementi è cosa naturale in quanto, se b è elemento nilpotente di un qualsiasi anello, che dunque soddisfi alla $b^m = 0$ per un certo $m > 0$, allora il $2m$-esimo commutatore $[x , b , \cdots , b]_{2m}$ di ogni elemento $x \in R$ risulta nullo. Potremo così al più sperare di descrivere gli anelli soddisfacenti ad una condizione di Engel soltanto per ciò che concerne l'insieme dei loro elementi nilpotenti.

I risultati che otterremo saranno più significativi nel caso in cui R soddisfi ad una condizione fissa di Engel.

Stabiliremo dapprima il:

TEOREMA 1. – *Se* R *è semi-semplice e soddisfa ad una condizione di Engel, allora* R *è commutativo.*

Dimostrazione. – Poiché la proprietà di soddisfare ad una condizione di Engel è invariante di fronte agli omoforfismi, e poiché un anello semi-semplice è somma sotto-diretta di anelli primitivi, ognuno dei quali risulta immagine omomorfa di R, per dimostrare il teorema sarà sufficiente provarlo per gli anelli primitivi.

Supponiamo, quindi, che R sia un anello primitivo soddisfacente ad una condizione di Engel. Essendo primitivo, R può essere rappresentato come un anello denso di trasformazioni lineari di uno spazio lineare V sopra un corpo (commutativo o sghembo) D.

(*) Lavoro compiuto in Roma quale Fellow della « John Simon Guggenheim Foundation » e col contributo della « NSF Grant G 19655 ».

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1962.

Se la dimensione di V sopra D fosse più grande dell'unità, o R sarebbe isomorfo a D_m, l'anello delle matrici $m \times m$ su D, oppure ogni D_k, per $k = 2, 3, \cdots$, sarebbe un'immagine omomorfa di un sottoanello di R. Vedremo d'altro canto che, quando $k = 1$, D_k non può soddisfare ad una condizione di Engel. Introdotto invero l'elemento $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in D_k$, si verifica facilmente, come conseguenza della $e^2 = e$, che $[x, e, e, e] = [x, e]$ per tutti gli $x \in D_k$; se dunque scegliamo un x tale che $[x, e] \neq 0$ non può mai essere zero l'elemento $[x, e, e, \cdots, e]$, onde l'asserto.

Ci rimane dunque soltanto da considerare il caso in cui la dimensione di V su D valga uno, il che implica che R sia un corpo; e si tratta di stabilire la commutatività di questo, ossia di D. Ora, se D non fosse commutativo dettone Z il centro e scelto un elemento a in D ma non in Z, esisterà un $x \in D$ tale che $xa - ax \neq 0$. Dovrà inoltre esistere un intero $m > 1$ tale che $[x, a, \cdots, a]_m = 0$ mentre invece $y = [x, a, \cdots, a]_{m-1} \neq 0$. Quindi $y \neq 0$ è della forma $at - ta$ e commuta con a. Possiamo, perciò, scrivere $y = as$ dove $s \neq 0$ anche commuta con a. Posto $w = ts^{-1}$, dalle $as = y = at - ta$, $as = sa$ deduciamo la $a = aw - wa$. Questa implica che risulti $[w, a, \cdots, a] = \pm a$ per tutti i più alti commutatori, il che esclude la possibilità che sia abbia $[w, a, \cdots, a]_n = 0$ per qualche n. Questa contradizione con la ipotesi che R soddisfi ad una condizione di Engel completa la dimostrazione del teorema.

Possiamo ora stabilire il

TEOREMA 2. – *Se l'anello* R *soddisfa ad una condizione fissa di Engel, allora l'ideale commutatore di* R *dev'essere un nil–ideale, sicché gli elementi nilpotenti di* R *formano un ideale. Questo ideale è localmente nilpotente.*

Dimostrazione. – Sia N il massimo nil–ideale di R, onde R/N non contiene un nil–ideale diverso dallo (o). Nell'ipotesi che R/N fosse commutativo, l'ideale commutatore di R risulterebbe contenuto in N e sarebbe quindi nil. Possiamo perciò assumere che R non contenga nil–ideali diversi dallo (o); e si tratta di dimostrare che R è commutativo.

Sia $W = \{x \in R \mid mx = 0$ per qualche intero $m > 0\}$.

È chiaro che W è un ideale di R. Inoltre, se fosse $q^2 x = 0$ per qualche intero $q > 0$ l'ideale generato da qx sarebbe nilpotente; avendo assunto che R contenga soltanto il nil–ideale banale (o), questo ci porta a $qx = 0$. In altri termini, se $mx = 0$ con $m > 0$, possiamo assumere che m sia un prodotto di numeri primi distinti.

Posto $W_p = \{x \in R \mid px = 0\}$ con p numero primo, è chiaro da quanto sopra che W risulta la somma diretta dei W_p. Rileviamo inoltre che per a in qualunque W_p, essendo per ipotesi zero ogni commutatore n–esimo, scelto k in guisa che $p^k > n$ risulta $[x, a, \cdots, a]_{p^k} = 0$ per qualsiasi $x \in R$. D'altro canto poiché, quest'ultimo commutatore può venire scritto nella forma $xa^{p^k} - a^{p^k} x$, sicché sussiste la $xa^{p^k} = a^{p^k} x$ per ogni $x \in R$, ossia risulta

$a^{p^k} \in Z$ (Z essendo il centro di R) per ogni elemento $a \in D$. Da un risultato da noi dimostrato alcuni anni or sono [1], possiamo da qui concludere che l'ideale commutatore di W_p è un nil–ideale (di W_p). E poiché ciò vale per ogni p l'ideale commutatore di W è un nil–ideale (di W). Ma è ben noto che quando un anello R è privo di nil–ideale la stessa proprietà sussiste per ogni ideale di R conseguentemente l'ideale commutatore di W non può che essere lo (o), ossia l'anello W risulta commutativo.

Ne consegue che, quando $a, b \in W$ ed $r \in R$ allora $ar \in W$, donde $(ar)\,b = b\,(ar) = (ba)\,r = abr$, e quindi $a\,(br - rb) = 0$. Detto $T = [W, R]$ il sottogruppo additivo generato da tutti gli elementi $ar - ra$, dove $a \in W$, $r \in R$, si ha dunque $RTR \subset W$. In base a ciò che precede si ha inoltre $WRTR = (0)$. Perciò $(RTR)^2 \subset WRTR = (0)$, ossia RTR è un ideale nilpotente di R. Dunque. $[W, R] = T = (0)$, da cui segue che $W \subset Z$.

Se $a \in R$ ed $r, s \in R$, allora $ar \in W$ sicché $ar \in Z$ e $(ar)\,s = s\,(ar) = (sa)\,r = asr$, da cui $a\,(rs - sr) = 0$. Detto C l'ideale commutatore di R, dal fatto che $W \subset Z$ e che W annulla tutti i commutatori deriviamo che $WC = (0)$.

Posto $\bar{R} = R/W$ è subito visto che la $m\bar{x} = 0$ con $\bar{x} \in \bar{R}$ ed m un intero positivo, implica la $\bar{x} = 0$. Consideriamo inoltre l'anello $\bar{\bar{R}} = \bar{R}/\bar{N}$, dove $\bar{N}$ denota il nil–ideale massimo di R. Anche in $\bar{\bar{R}}$ è vero che la $m\bar{\bar{x}} = 0$ con m intero positivo implica la $\bar{\bar{x}} = 0$. Di più, poiché $\bar{\bar{R}}$ non contiene nessun nil–ideale diverso dallo (o), in base ad un risultato di Amitsur [2], l'anello $\bar{\bar{R}}[t]$ dei polinomi in t su R dev'essere semi–semplice.

In $\bar{\bar{R}}$ rendiamo lineare l'identità $[\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{a}}, \cdots, \bar{\bar{a}}]_{n+1} = 0$ ottenendo così che per tutti gli $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{a}}_1, \cdots, \bar{\bar{a}}_n \in \bar{\bar{R}}$ deve essere $\Sigma\,[\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{a}}_{(1)}, \cdots, \bar{\bar{a}}_{(n)}] = 0$ dove la somma va estesa alle $n!$ permutazioni σ di $1, 2, \cdots, n$. E poiché questa identità multilineare sussiste in $\bar{\bar{R}}$, essa vale anche in $\bar{\bar{R}}[t]$ per tutti gli $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{a}}_1, \cdots, \bar{\bar{a}}_n$ di $\bar{\bar{R}}[t]$.

Specializzando quest'ultima col porre $\bar{\bar{a}}_1, = \cdots = \bar{\bar{a}}_n = \bar{\bar{a}}$ otteniamo la $n!\,[\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{a}}, \cdots, \bar{\bar{a}}]_{n+1} = 0$ per $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{a}}$ arbitrari in $\bar{\bar{R}}[t]$. Da qui tosto si trae la $[\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{a}}, \cdots, \bar{\bar{a}}]_{n+1} = 0$, onde $\bar{\bar{R}}[t]$ soddisfa ad una condizione fissa di Engel. $\bar{\bar{R}}[t]$, essendo semi–semplice, in forza del teorema 1 è dunque commutativo. E poiché $\bar{\bar{R}} \subset \bar{\bar{R}}[t]$ anche R risulta commutativo.

Ne discende che $\bar{C}$, l'ideale commutatore di $\bar{R}$, dev'essere contenuto in $\bar{N}$, ed è perciò un nil–ideale. Per ogni $x \in C$, l'immagine, $\bar{x}$, di x in $\bar{R}$ è in $\bar{C}$, onde $\bar{x}^{n(x)} = 0$, cioè, $x^{n(x)} \in W$. Rammentando che $WC = 0$, da qui otteniamo $x^{n(x)}\,C = (0)$ ed, in particolare, $0 = x^{n(x)}\,x = x^{n(x)+1}$. Abbiamo così dimostrato che ogni elemento di C è nilpotente, sicché C è un nil–ideale. Ma R non possiede nil–ideali diversi dallo (o), sicché dev'essere $C = (0)$, ossia l'anello R risulta commutativo. In virtù del primo capoverso della dimostrazione del teorema 2, ne discende che in un anello generale soddisfacente ad una condizione fissa di Engel l'ideale commutatore è un nil–ideale.

Siano ora a, b elementi nilpotenti qualsiasi di R, sicché $(a + b)^k \in C$ per qualche k, poiché C è nil ne consegue che $a + b$ è nilpotente. In modo del tutto simile risulta che tanto ar che ra sono nilpotenti, quando a sia nilpotente ed r denoti un elemento arbitrario di R. Abbiamo così dimostrato che gli elementi nilpotenti di R formano un ideale. In quest'ideale vale per ipotesi l'identità $[x, a, \cdots, a]_n = 0$ sicché in base ad un ben noto risultato [3], l'ideale stesso è localmente nilpotente. E ciò completa la dimostrazione del teorema 2.

Da questo teorema si è tratti a congetturare che, anche in un qualsiasi anello che soddisfi ad una condizione (non fissa) di Engel, gli elementi nilpotenti formino un ideale.

BIBLIOGRAFIA.

[1] I. N. HERSTEIN, *A theorem on rings*, «Canadian Journal of Mathematics», vol. 5, pp. 238–241 (1953).

[2] S. A. AMITSUR, *Radicals of polynomial rings*, «Canadian Journal of Mathematics», vol. 8, pp. 355–361.

[3] N. JACOBSON, *Structure of rings*, «American Math. Society, Colloquium Series», vol. 37 (1956).