ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

GRAZIA FELLEGARA

## Gli ovaloidi in uno spazio tridimensionale di Galois di ordine 8

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **32** (1962), n.2, p. 170–176.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_2_170_0¿

**Matematica.** — *Gli ovaloidi in uno spazio tridimensionale di Galois di ordine 8.* Nota di GRAZIA FELLEGARA, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

INTRODUZIONE. – Sia $S_{r,q}$ uno spazio $r$–dimensionale proiettivo sopra un corpo di Galois di ordine $q$ [4]. Diremo con B. Segre che un insieme di $k$ punti di $S_{r,q}$ è una $k$–calotta, se mai tre dei suoi punti risultano fra loro allineati. Assegnati $r$ e $q$, il numero $k$, per il quale esistano di fatto delle $k$–calotte, ammette un massimo M; chiameremo ovaloidi quelle $k$–calotte per cui $k$ raggiunga il suo massimo.

Per

$$r = 3 \quad \text{e} \quad q > 2$$

si dimostra [3] che

$$M = q^2 + 1 ,$$

un esempio di $(q^2 + 1)$–calotta, cioè di ovaloide, essendo dato dall'insieme dei punti di una quadrica ellittica di $S_{3,q}$. Si prova inoltre che, nel caso di $q$ dispari, le uniche $(q^2 + 1)$–calotte sono le quadriche ellittiche [1], [5].

Nel caso della caratteristica 2 lo studio degli ovaloidi si presenta assai diversamente. B. Segre ha da tempo dimostrato che la classe degli ovaloidi non coincide con quella delle quadriche ellittiche, costruendo un esempio di ovaloide di $S_{3,8}$ [6]; in seguito, J. Tits ha costruito negli spazi di ordine $q = 2^{2m+1}$ una classe di ovaloidi, non quadriche, fra loro proiettivamente equivalenti, ciascuno mutato in sé da un gruppo finito semplice di proiettività d'ordine $q^2 (q^2 + 1) (q - 1)$ [7]. È poi risultato che l'esempio di ovaloide dato inizialmente da Segre nel caso $q = 8$ rientra fra quelli di Tits [2].

Partendo da tali premesse, nel presente studio ci siamo proposti di caratterizzare gli ovaloidi appartenenti a $S_{3,8}$: abbiamo potuto stabilire che, in tal caso, tutti gli ovaloidi che non si riducono a quadriche ellittiche sono precisamente del tipo di quelli di Segre–Tits.

Per giungere a tale risultato è stato necessario usare una calcolatrice elettronica. Ringraziamo il Centro Calcoli dell'Università di Milano per aver messo a disposizione il complesso elettronico Remington USS 90, l'ing. L. Lunelli che ha elaborato il diagramma logico e la dott. L. Gotusso che ne ha curato la programmazione.

§ 1. – Richiamiamo, per comodità del lettore, alcune proprietà di cui godono gli ovaloidi appartenenti a uno spazio tridimensionale di caratteristica 2:

(*) Nella seduta del 10 febbraio 1962.

I) Ogni ovaloide determina una corrispondenza biunivoca tra punti e piani, che diremo polarità essendo di fatto una polarità rispetto ad un sistema nullo [6].

II) Ogni ovaloide $\Gamma$, che non sia una quadrica, contiene almeno un punto O nucleo di almeno $q/2 + 1$ sue coniche puntate [6].

III) I piani di tali coniche puntate contengono tutti una certa retta $r$, tangente in O all'ovaloide [6].

IV) I poli dei piani suddetti sono punti distinti di $r$, e la corrispondenza tra poli e piani è proiettiva [6].

V) Esiste un piano per $r$ per ciascun punto del quale (non su $r$) passa una sola retta che si appoggi a due qualunque delle coniche sopra ricordate; tale piano coincide col piano tangente a $\Gamma$ in O [6].

VI) Sia K una $k$–calotta di $S_{3,q}$, contenuta in un ovaloide $\Gamma$; se

$$k \geq (q^2 + q + 4)/2 \qquad \text{e} \qquad q \geq 4 \, ,$$

ogni $k'$–calotta contenente K è contenuta in $\Gamma$.

Diamo qui, per chiarezza, la dimostrazione di questa proprietà, anche se del tutto analoga [6] ad una data da B. Segre e relativa alle quadriche.

Sia O un punto di K′ non appartenente a $\Gamma$; per O passano $q + 1$ tangenti all'ovaloide e $k$ tangenti a K [6]. Perciò vi sono almeno

$$k - (q + 1) \geq (q^2 - q + 2)/2$$

corde di $\Gamma$ per O, le quali contengono complessivamente

$$q^2 - q + 2$$

punti di $\Gamma$, mentre le tangenti a $\Gamma$ per O ne contengono $q + 1$. E ciò è in contrasto col fatto che $\Gamma$, essendo un ovaloide, deve contenere esattamente $q^2 + 1$ punti.

VII) Gli ovaloidi di Segre–Tits dello spazio [7] sono in numero di

$$(q^3 - 1) \, q^4 \, (q - 1) \, (q + 1)^2 \, ;$$

tale numero si ottiene subito dividendo quello delle proiettività dello spazio per l'ordine del gruppo che muta ciascun ovaloide in sé.

In guisa analoga si vede che gli ovaloidi passanti per un punto assegnato sono in numero di

$$(q^3 - 1) \, q^4 \, (q^2 - 1) \, ;$$

mentre quelli che passano per un dato punto e che hanno ivi un piano tangente assegnato sono in numero di

$$(q - 1) \, q^4 \, (q^2 - 1) \, .$$

§ 2. – Sopra il corpo GF(8) di Galois, definito per esempio aggiungendo al campo GF(2), formato dagli elementi 0 e 1, una radice $k$ dell'equazione algebrica irriducibile

$$k^3 = k + 1 \, ,$$

consideriamo lo spazio $S_{3,8}$ i cui punti abbiano le coordinate omogenee $(x, y, z, t)$. In $S_{3,8}$ consideriamo tutti gli ovaloidi per i quali siano verificate le seguenti ipotesi: il punto O, di coordinate $(0, 0, 1, 0)$, sia nucleo di almeno cinque coniche puntate; la retta $r$ di equazioni $y = t = 0$ sia la tangente comune a tali coniche; il piano $\omega$ di equazione $t = 0$, che verrà assunto quale « piano improprio », sia il piano tangente agli ovaloidi in O. Tali ovaloidi segheranno, per ipotesi, su cinque dei piani del fascio di equazione $y = a_i t$ (dove $a_i$ è un elemento di GF(8)), cinque coniche puntate di nucleo O e polo $T_i$ $(1, 0, a_i, 0)$. Supponiamo che i cinque piani in questione siano quelli di equazione

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ y = t \\ y = kt \\ y = (k+1)\,t \\ y = k^2 t\,. \end{cases}$$

Osserviamo che questa quintupla di piani non è una quintupla particolare, perché con un'opportuna affinità la si può mutare in una qualunque altra quintupla.

Infatti le quintuple di piani del fascio sono in numero di $\binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 7 \cdot 8$, e quindi altrettante quante sono le affinità

$$x' = ax + b\,.$$

D'altro canto, queste affinità non mutano alcuna quintupla in sé, perché altrimenti sarebbero affinità che conservano i tre piani residui e quindi o involutorie o cicliche del terzo ordine. Ma è noto [4] che le involuzioni in un campo di caratteristica 2 hanno un solo elemento unito, mentre le omografie cicliche del terz'ordine non possono averne alcuno, ciò che porta ad una contraddizione.

§ 3. – Su ciascuno dei piani (I) v'è una rete di coniche, che hanno polo in $T_i$ e nucleo in O; precisamente, sul piano $y = a_i t$ la rete ha equazioni:

$$\text{(2)} \qquad y = a_i t \quad , \quad a_i^2 x^2 + z^2 + b_i^2 t^2 + dxt = 0\,,$$

al variare di $b_i$ e $d$ in GF(8).

Tenendo conto della proprietà V), si può dimostrare che le possibili sezioni degli ovaloidi considerati sono su ogni piano quelle originate dalle coniche irriducibili di un fascio. E ciò si stabilisce in base al seguente

TEOREMA. – *Siano* $\pi$ *e* $\pi'$ *due piani distinti di un* $S_{3,q}$ *sopra un arbitrario campo perfetto di caratteristica due,* $r$ *la retta loro intersezione, e* C *una conica irriducibile di* $\pi$ *tangente a* $r$ *in un punto* T. *Le coniche appartenenti a* $\pi'$ *tangenti a* $r$ *in un punto assegnato* T′ *diverso da* T, *aventi come nucleo quello di* C *e che godono della proprietà di ammettere per ogni punto di un fissato piano* $\omega$, *passante per* $r$, *una sola unisecante comune a* C, *costituiscono le coniche irriducibili di un fascio.*

Consideriamo un punto P di $\omega$, fuori di $r$; proiettiamo da P la conica C su $\pi'$ in C'. Le coniche richieste dovranno essere unisecanti la C', passanti per T' e di nucleo O. Le coniche di $\pi'$ con nucleo in O formano uno spazio proiettivo a tre dimensioni, $E_3$, in cui quelle per T' formano un piano $E_2$. D'altra parte, le coniche unisecanti la C' costituiscono un piano $E_2'$; infatti, indicando con $r_i = 0$ una delle $q + 1$ rette del fascio di centro O appartenenti a $\pi'$, le coniche secanti in un sol punto C' appartengono ai $q + 1$ fasci del tipo

$$C' + \lambda r_i^2 = 0 .$$

Questi ultimi, costituiscono in $E_3$ un cono che si riduce a un piano contato due volte; infatti la retta congiungente due punti, appartenenti a due diverse generatrici, è una retta del sistema stesso. L'intersezione dei due sottospazi è allora una retta in $E_3$, ossia un fascio di coniche del piano $\pi'$.

Utilizzando questo teorema, è facile vedere quali siano le equazioni del fascio di coniche in ciascuno dei piani (I).

Sul piano $y = 0$, consideriamo la conica C di equazioni

$$z^2 + xt = 0 \quad , \quad y = 0 ,$$

tangente nel punto T(1, 0, 0, 0) alla $r$, e, sul piano $y = a_i t$, la generica conica $C_i$ appartenente alla rete di equazioni (2). I $q$ punti appartenenti a C — T e a $C_i$ — $T_i$ sono rispettivamente dati da

$$P: \quad x = \lambda^2 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = \lambda \quad , \quad t = 1 ,$$

$$P_i: \quad x = \mu \quad , \quad y = a_i \quad , \quad z = \sqrt{a_i^2 \mu^2 + d\mu + b_i^2} = g_i(\mu) \quad , \quad t = 1 ,$$

al variare di $\lambda$ e $\mu$ in GF(8); mentre il punto variabile sul piano $t = 0$ e fuori della retta $r$ è dato da

$$Q: \quad x = 1 \quad , \quad y = b \quad , \quad z = \gamma \quad , \quad t = 0 ,$$

al variare di $\beta$ e $\gamma$ in GF(8), con $\beta \neq 0$.

La condizione di allineamento di P, $P_i$ e Q porta alle:

$$\lambda^2 \beta + \mu\beta + 1 = 0 , \tag{3}$$

$$\lambda\beta + a_i \gamma + \beta g_i(\mu) = 0 . \tag{4}$$

Dalla (4), sostituendo il $\mu$ dato dalla (3) e quadrando, si ottiene

$$\lambda^2 \beta^2 + a_i^2 \gamma^2 + \beta^2 \left( \frac{\lambda^4 \beta^2 + 1}{\beta^2} + d \frac{\lambda^2 \beta + 1}{\beta} + b_i^2 \right) = 0 ;$$

questa è un'equazione di secondo grado in $\lambda^2$, che ha una sola radice soltanto [4] se

$$\beta^2 + d\beta^2 = 0 ;$$

essendo $\beta \neq 0$, si ha quindi:

$$d = 1 .$$

Le equazioni del fascio di coniche del piano $y = a_i t$ sono allora

$$y = a_i t \quad , \quad a_i^2 x^2 + z^2 + b_i^2 t^2 + xt = 0 .$$

§ 4. – Siano $C_i , C_j , C_l$ tre coniche appartenenti rispettivamente ai piani $\pi_i , \pi_j , \pi_l$; cerchiamo la condizione (d'ora in poi indicata col nome di condizione $\vartheta$) necessaria affinché esse, private del loro punto di tangenza con la retta $r$ e considerate insieme al loro nucleo O, possano costituire le sezioni di un ovaloide con i tre piani.

La conica

$$C_s : \quad y = a_s t \quad , \quad a_s^2 x^2 + z^2 + b_s^2 t^2 + xt = 0 \qquad (s = i , j , l)$$

appartiene al piano $\pi_s$, è tangente alla retta $r$ nel punto $T_s(1 , 0 , a_s , 0)$ e ha nucleo in O.

I $q$ punti appartenenti a $C_s — T_s$ sono dati da

$$P_s : \quad x = \lambda_s^2 \quad , \quad y = a_s \quad , \quad z = a_s \lambda_s^2 + \lambda_s + b_s = f_s(\lambda_s) \quad , \quad t = 1 ,$$

al variare del parametro $\lambda_s$ in GF(8).

La condizione $\vartheta$ relativa alle tre coniche $C_i , C_j , C_l$ implica che la retta $P_i P_j$ non abbia punti a comune con $C_l$, e ciò analiticamente si traduce nella condizione che la seguente espressione

$$(a_j + a_l) b_i + (a_l + a_i) b_j + (a_j + a_i) b_l \tag{5}$$

risulti di seconda categoria [4]. Infatti la retta $P_i P_j$ incontra il piano $\pi_l$ nel punto di coordinate

$$x = \rho\lambda_i^2 + \lambda_j^2 \quad , \quad y = \rho a_i + a_j \quad , \quad z = \rho f_i(\lambda_i) + f_j(\lambda_j) \quad , \quad t = \rho + 1 ,$$

con

$$\rho = \frac{a_j + a_l}{a_i + a_l} . \tag{6}$$

Affinché tale punto appartenga alla conica $C_l$ dev'essere

$$\frac{\rho}{\rho + 1} \lambda_i^2 + \frac{1}{\rho + 1} \lambda_j^2 = \lambda_l^2 \quad , \quad \frac{\rho}{\rho + 1} f_i(\lambda_i) + \frac{1}{\rho + 1} f_j(\lambda_j) = f_l(\lambda_l) . \tag{7}$$

Da quest'ultima, quadrando, si ottiene:

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 + 1} f_i^2(\lambda_i) + \frac{1}{\rho^2 + 1} f_j^2(\lambda_j) = f_l^2(\lambda_l) ;$$

e questa, quando si ponga

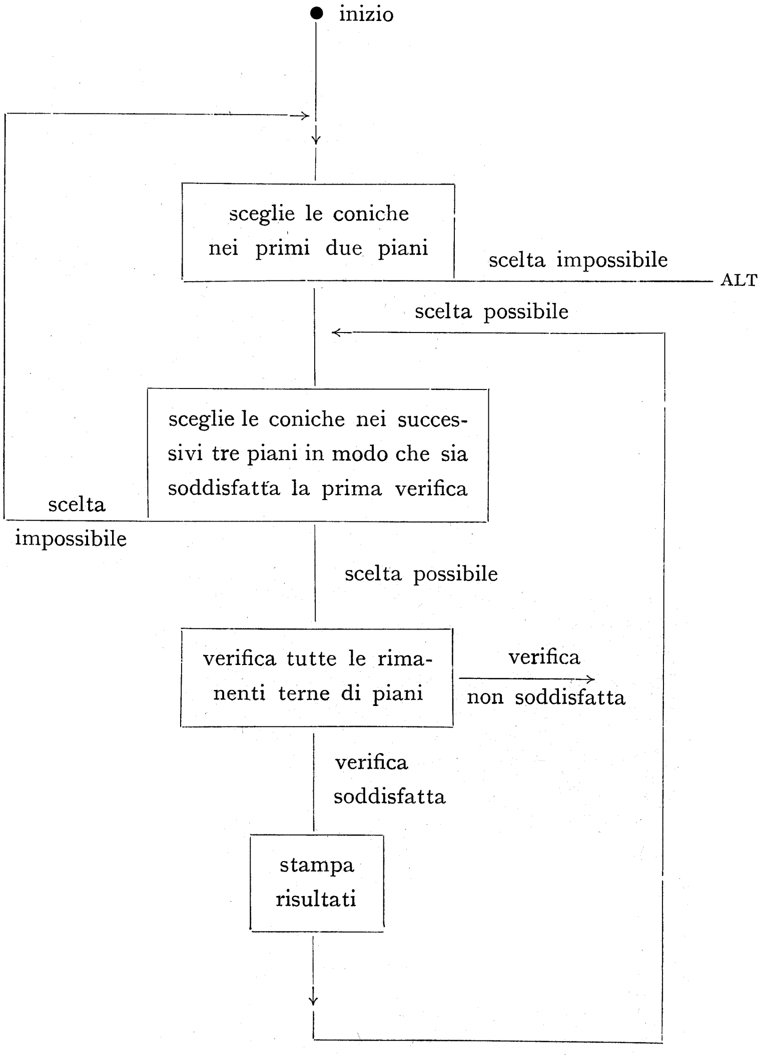
$$X = (a_i + a_l)(a_j + a_l)(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)$$

e si tenga conto della (7), può anche scriversi

$$X^2 + X = (a_j^2 + a_l^2) b_i^2 + (a_l^2 + a_i^2) b_j^2 + (a_j^2 + a_i^2) b_l^2 .$$

Affinché l'ultima equazione sia priva di radici X in GF(8) dev'essere di seconda categoria l'espressione (5), onde l'asserto.

§ 5. – La scelta delle quintuple di coniche tali che ciascuna delle terne da esse estraibili soddisfaccia alla condizione $\vartheta$ è stata operata dalla calcolatrice elettronica. Le calotte che così si ottengono hanno 41 punti ciascuna. Per tale lavoro è stato utilizzato il seguente diagramma logico dell'ing. L. Lunelli:




SCHEMA DEL DIAGRAMMA LOGICO.

Si sono così calcolati i dati relativi a 512 41–calotte e si è stabilito che, una volta fissato un piano $\omega$ come piano tangente, per due coniche assegnate di nucleo O passano 8 di queste calotte. Ciò consente di giungere al seguente risultato:

*Gli ovaloidi appartenenti a* $S_{3,8}$ *sono soltanto quadriche oppure ovaloidi del tipo di Segre–Tits.*

La proprietà VII) del § 1 dà il numero degli ovaloidi di Segre–Tits che passano per un dato punto O e che hanno ivi un piano tangente assegnato; il numero degli ovaloidi che passano inoltre per una conica puntata di dato nucleo O si ottiene ricordando che ogni punto appartenente a uno di tali ovaloidi è nucleo di $q$ coniche puntate, e che le coniche puntate che si possono assegnare sono in numero di $(q^2 + q)\, q^2 (q - 1)$ (1).

Ne viene che il numero di ovaloidi cercato è

$$\frac{(q-1)\, q^4 (q^2 - 1)\, q}{(q+1)\, q^3 (q-1)} = (q-1)\, q^2 .$$

Fra gli ovaloidi sopra ricordati, quelli che verificano l'ulteriore condizione di contenere una seconda conica puntata di nucleo O sono in numero di

$$\frac{(q-1)\, q^2 (q-1)}{(q-1)^2\, q} = q .$$

Da ciò si trae che le 512 41–calotte costruite sono tutte ampliabili in ovaloidi di Segre–Tits. D'altra parte, la proprietà VI) del § 1 assicura che ciascuna delle nostre calotte, avendo 41 punti, può appartenere a un solo ovaloide.

## BIBLIOGRAFIA.

[1] A. BARLOTTI, *Un'estensione del teorema di Segre–Kustaanheimo*, « Boll. U.M.I » (3), *10*, 4, pp. 498–506 (1955).
[2] G. FELLEGARA, *Gli ovaloidi in uno spazio tridimensionale di Galois di caratteristica 2*, Tesi di Laurea depositata presso l'Università di Roma.
[3] B. QVIST, *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, « Ann. Ac. Sc. Fennicae », Ser. A, I, n. 134 (1952).
[4] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, vol. I (Bologna, Zanichelli, 1948); od anche *Lectures on modern geometry* (Roma, Cremonese, 1961); *Monogr. Mat. del C.N.R.*, vol 7.
[5] B. SEGRE, *Le geometrie di Galois*, « Ann. di Mat. » (6), *48*, pp. 1–96 (1959).
[6] B. SEGRE, *On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two*, « Acta Arithmetica », *5*, pp. 313–330 e 303–311 (1959).
[7] J. TITS, *Les Groupes simples de Suzuki et de Ree*, Séminaire Bourbaki, 13ème année, n. 210, pp. 210–217 (1960–61).

(1) Questo si ottiene moltiplicando il numero dei piani per il punto O, escluso il piano tangente ω, per il numero delle coniche di un piano di dato nucleo O.