Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aristide Halanay

Perturbations singulières des systèmes autonomes

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.2, p. 167–169.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_2_167_0¿

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Perturbations singulières des systèmes autonomes*. Nota di ARISTIDE HALANAY (*), presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. Considérons la système

$$
(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2, x_3, \mu) \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2, x_3, \mu) \\[2mm] \mu \dfrac{dx_3}{dt} = h(x_1, x_2, x_3, \mu) \end{cases} \qquad \mu > 0.
$$

Pour $\mu = 0$ on obtient le système

$$
\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2, x_3, 0)
$$

$$
\frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2, x_3, 0)
$$

$$
0 = h(x_1, x_2, x_3, 0).
$$

Supposons qu'il existe une fonction $\varphi(x_1, x_2)$ définie dans un domaine D, telle que $h[x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2), 0] \equiv 0$ pour $(x_1, x_2) \in D$ et $h(x_1, x_2, x_3, 0) < 0$ pour $(x_1, x_2) \in D$, $\varphi(x_1, x_2) < x_3 < \varphi(x_1, x_2) + \alpha$, $h(x_1, x_2, x_3, 0) > 0$ pour $(x_1, x_2) \in D$, $\varphi(x_1, x_2) - \alpha < x_3 < \varphi(x_1, x_2)$.

Soit le système

$$
(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f[x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2), 0] \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = g[x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2), 0] \end{cases} \qquad (x_1, x_2) \in D.
$$

Supposons que ce système admet un cycle limite stable Γ en D. On peut construire deux courbes fermées Γ_1 et Γ_2 situées des deux cotés de Γ, coupées par les trajectoires du système (2) sous un angle qui dépasse une valeur β [1]. Considérons les cylindres $(x_1, x_2) \in \Gamma_1$, $(x_1, x_2) \in \Gamma_2$, $\varphi(x_1, x_2) - \frac{\alpha}{2} \leq x_3 \leq \varphi(x_1, x_2) + \frac{\alpha}{2}$ et le domaine T dont la frontière est formée par ces cylindres et les surfaces $x_3 = \varphi(x_1, x_2) - \frac{\alpha}{2}$, $x_3 = \varphi(x_1, x_2) + \frac{\alpha}{2}$. Pour μ suffisamment petit le champ de vecteurs (1) est presque vertical, donc il est dirigé vers l'intérieur de T. Si l'on prend α suffisamment petit et ensuite μ suffisamment petit les cylindres sur la frontière de T seront coupés aussi vers l'intérieur de T.

(*) Institut de Mathématiques de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest.

(**) Nella seduta del 10 febbraio 1962.

Il s'ensuit que les trajectoires de (1) qui partent de T restent dans T. Au cycle limite Γ correspond une fonction de Liapounoff rotatoire

$$\mathrm{V}(x_1, x_2) = \frac{\mathrm{F}_1(x_1, x_2)}{\mathrm{F}_2(x_1, x_2)}$$

telle que dans la couronne entre Γ_1 et Γ_2

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} f[x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2), 0] + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2} g[x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2), 0] > \gamma > 0 .$$

Il s'ensuit que pour μ suffisament petit on a aussi

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_1} f[x_1, x_2, x_3, \mu] + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_2} g[x_1, x_2, x_3, \mu] > \gamma_1 > 0$$

dans T, donc V est une fonction de Liapounoff rotatoire pour le système (1) aussi. D' une proposition de [2] il s'ensuit que le sytème (1) admet dans T une solution périodique. On a donc le théorème suivant.

THÉORÈME 1. – *Si le système* (2) *admet dans* D *un cycle limite stable* Γ, *alors il existe* $\mu_0 > 0$ *tel que pour* $0 < \mu < \mu_0$ *le système* (1) *admet une solution périodique stable qui pour* $\mu \to 0$ *se réduit à la courbe* $(x_1, x_2) \in \Gamma$, $x_3 = \varphi(x_1, x_2)$.

On peut appliquer ce théorème dans le cas étudié dans [3] où le système (2) est l'équation de van der Pol qui admet un cycle limite stable.

2. Considérons le système général

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x, y, \mu) \\ \mu \dfrac{dy}{dt} = g(x, y, \mu) \end{cases}$$

où x est un vecteur à 1 dimensions, y un vecteur à m dimensions. Pour $\mu = 0$ on obtient le système

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, 0)$$

$$0 = g(x, y, 0).$$

Supposons que pour $x \in \mathrm{D}$ il y a une fonction $\varphi(x)$ telle que

$$g(x, \varphi(x), 0) \equiv 0 .$$

Considérons le système

$$(4) \qquad \frac{dx}{dt} = f[x, \varphi(x), 0], \qquad x \in \mathrm{D}$$

et supposons qu'il admet dans D une solution périodique, respectivement presque-périodique $u(t)$.

Soit $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_l$ le système orthogonal normé attaché à la solution $u(t)$, où $\xi_1 = \dfrac{f(u(t), \varphi[u(t)], 0)}{|f(u(t), \varphi[u(t)], 0)|}$ et les ξ_i, $i \geq 2$ sont définis comme dans [4]. De la construction des vecteurs ξ_i il s'ensuit qu'il sont périodiques, resp.

presque–périodiques en t. Faisons dans le système (3) le changement de variables donné par $x = u(\theta) + S(\theta) z$ où les nouvelles variables sont θ et z et $S(\theta)$ est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\xi_2, \cdots, \xi_l$. On obtient un système de la forme

$$\frac{d\theta}{dt} = \Theta(\theta, z, y, \mu)$$

$$\frac{dz}{dt} = Z(\theta, z, y, \mu)$$

$$\mu \frac{dy}{dt} = g[u(\theta) + S(\theta) z, y, \mu].$$

Pour $\mu = 0$, $z = 0$, $y = \varphi[u(\theta)]$ on a $\Theta = 1$, donc pour y dans le voisinage de $\varphi[u(\theta)]$ et z, μ assez petits on a $\Theta \neq 0$. On peut donc prendre θ comme variable indépendante et l'on obtient le système

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{Z(\theta, z, y, \mu)}{\Theta(\theta, z, y, \mu)} \equiv F(\theta, z, y, \mu), \; \mu \frac{dy}{d\theta} = \frac{g[u(\theta) + S(\theta) z, y, \mu]}{\Theta(\theta, z, y, \mu)} \equiv Y(\theta, z, y, \mu).$$

Pour ce système on peut appliquer les résultats de [5], [6]. Pour $\mu = 0$ on a $g[u(\theta) + S(\theta) z, y, 0] = 0$, $\frac{dz}{d\theta} = F(\theta, z, y, 0)$ qui admet la solution $z = 0$, $y = \varphi[u(\theta)]$.

Par un calcul direct on remarque que le système aux variations qui intervient dans [5] coïncide avec le système aux variations normales de [4], c'est–à–dire le système linéaire de première approximation du système $\frac{dz}{d\theta} = F[\theta, z, \varphi[u(\theta) + S(\theta) z], 0]$.

THÉORÈME 2. – *Si le système* (4) *admet une solution périodique, resp. presque–périodique* $u(t)$ *située dans* D *et telle que* $\frac{Q + Q^*}{2} \leq -\gamma E$ *où* $Q = g'_y(u(\theta), \varphi[u(\theta)], 0)$ *et si la solution banale du système aux variations normales est uniformément asymptotique stable, alors il existe* μ_0 *tel que pour* $0 < \mu < \mu_0$ *le système* (3) *admet une solution périodique, resp. presque–périodique unique qui pour* $\mu = 0$ *se réduit à* $(u(t), \varphi[u(t)])$.

Dans le cas périodique un résultat plus général a été établi par une autre voie dans [7].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. F. BAGGIS DE, *Contributions to the theory of nonlinear oscillations*, «Ann. of. Math. Studies», *20*, 37–59 (1952).

[2] V. V. NEMYCKII, «Trudy Mosk Mat. ob.», *5*, 455–482 (1956); «Doklady Akad. Nauk SSSR» (NS) *97*, 33–36 (1954).

[3] L. CAPRIOLI, Symposium sur les vibrations non–linéaires, Kiev, Sept. 1961.

[4] M. URABE, «Funkcialaj Ekvacioj», *1*, 1–84 (1958).

[5] L. FLATTO and N. LEVINSON, «J. Math. Mech.» *4*, 943–950 (1955).

[6] J. K. HALE and G. SEIFERT, Symposium sur les vibrations non–linéaires Kiev, Sept. 1961.

[7] D. V. ANOSOV, «Mat. Sbornik», *T 50* (92) No. 3, 299–334 (1960).