Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Banfi

Sull'espressione dell'energia elettrica nei mezzi dispersivi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.1, p. 62–68.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_1_62_0¿

Fisica-matematica. — *Sull'espressione dell'energia elettrica nei mezzi dispersivi.* Nota di CARLO BANFI, presentata [*] dal Corrisp. D. GRAFFI.

1. Come è noto il teorema di Poynting si può scrivere, per una regione R dove non sono presenti forze elettromotrici e correnti impresse, nel seguente modo:

$$d\mathfrak{I} = \int_R [d(W + T) + dp]\, dR ; \tag{1}$$

dove $d\mathfrak{I}$ è l'energia che entra in R, nell'intervallo di tempo $t, t + dt$; W e T sono rispettivamente la densità di energia elettrica e magnetica in R, dW e dT le loro variazioni in $t, t + dt$, e dp rappresenta le perdite nell'unità di volume nel medesimo intervallo.

Ora in un mezzo non dispersivo, che potremo anche dire normale, si assume $W \frac{\varepsilon E^2}{2}$, $T = \frac{\mu H^2}{2}$; dove ε e μ sono rispettivamente la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del mezzo in R, che come la conducibilità, si suppongono indipendenti dalla frequenza; mentre le perdite dp valgono il calore di Joule, ovviamente **E** ed **H** sono il campo elettrico e magnetico. In un mezzo dispersivo invece i valori di W e T sono indeterminati; infatti partendo dalle equazioni di Maxwell per un mezzo dispersivo, si ottiene la relazione:

$$\mathbf{H}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} + \mathbf{E}(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} + p ; \tag{2}$$

dove **D** e **B** sono il vettore spostamento e il vettore induzione, e dove si è indicato, come si farà per il seguito, il prodotto scalare di due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ con la notazione $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Con questa relazione, senza ulteriori ipotesi, restano indeterminate le espressioni di $W + T$ e p.

Il Volterra ha già indicato in sostanza una espressione per W e T [1]; recentemente ne è stata proposta una da Borgnis [2]. È ovvio porsi il problema se le due espressioni coincidono. La questione è risolta in questa Nota con risultato negativo; più precisamente: le espressioni di W (o di T) proposte da Volterra e da Borgnis, per un mezzo dispersivo non sono in generale coincidenti.

Ci occuperemo in questa Nota solo dell'espressione di W, in altre parole supporremo $T = \mu H^2/2$, che è il caso di maggior interesse.

(*) Nella seduta del 13 gennaio 1962.

(1) V. VOLTERRA, *Teoria dei funzionali nei fenomeni ereditari*, «Atti del Congresso intern. dei matematici», Bologna 1928; Tomo I, pp. 215–232.

(2) F. BORGNIS, *Zur elektromagnetischen Energiedichte in Medien mit Dispersion*, «Zeitschrift für Physik», vol. 159, pp. 1–6 (1960).

2. Il Borgnis caratterizza i mezzi dispersivi con la costante dielettrica complessa relativa a campi sinoidali di pulsazione ω, $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega)$ supponendo $\varepsilon(\omega)$ assegnata per ogni ω. Per esigenze fisiche deve essere $\varepsilon_1(\omega)$ funzione pari, $\varepsilon_2(\omega)$ funzione dispari [(3)].

Partendo dallo sviluppo di $\mathbf{E}(t)$ in integrale di Fourier, supposto tale sviluppo lecito, nella forma:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\omega) \exp[-i\omega t]\, d\omega\,, \tag{3}$$

con $\mathcal{E}(\omega)$ vettore complesso, il Borgnis ottiene per la densità di energia elettrica l'espressione:

$$W_B = \frac{1}{4\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\omega)\cdot\mathbf{E}^*(\omega') \exp[-i(\omega-\omega')t]\, \frac{\omega'\varepsilon_1(\omega') - \omega\varepsilon_1(\omega)}{\omega'-\omega}\, d\omega\, d\omega'\,{}^{(4)}; \tag{4}$$

dove $\mathbf{E}^*$ è il coniugato di $\mathbf{E}$.

Il Volterra propone una espressione della densità di energia, nel caso in cui le relazioni materiali del campo elettromagnetico siano di tipo ereditario; in tal modo, come è noto, si possono rappresentare i fenomeni dispersivi [(5)]. Più precisamente il Volterra dà alla relazione fra il vettore spostamento $\mathbf{D}(t)$ e il campo elettrico $\mathbf{E}(t)$ la seguente forma di tipo ereditario:

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(t) + \int_0^{t_0} \Phi(\tau)\, \mathbf{E}(t-\tau)\, d\tau\,; \tag{5}$$

dove ε_0 è una costante reale e $\Phi(\tau)$ è una funzione continua di τ, t_0 ha un valore positivo che può coincidere con $+\infty$ (in questo caso però $\Phi(\tau)$ deve annullarsi all'infinito in modo tale che per ogni $\mathbf{E}(t)$ limitato, l'integrale converga).

In base a questa relazione egli assume per la densità di energia elettrica la seguente espressione, che egli chiama anche potenziale ereditario:

$$W_V = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^{t_0} \Phi(\tau)\, \mathbf{E}^2(t-\tau)\, d\tau\,. \tag{6}$$

(3) F. BORGNIS, ibidem, p. 2.

(4) Effettivamente il Borgnis dà la seguente espressione:

$$\frac{1}{16\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{E}(\omega)+\mathbf{E}^*(-\omega)]\cdot[\mathbf{E}(-\omega')+\mathbf{E}^*(\omega')] \exp[-i(\omega-\omega')t]\, \frac{\omega'\varepsilon_1(\omega')-\omega\varepsilon_1(\omega)}{\omega'-\omega}\, d\omega\, d\omega'\,;$$

questa tuttavia, tenendo presente che vale sempre la relazione $\mathcal{E}(-\omega) = \mathcal{E}^*(\omega)$, si riduce facilmente alla (4).

(5) Le prime applicazioni delle relazioni ereditarie a fenomeni dispersivi sono dovute a U. CISOTTI (*L'ereditarietà lineare e i fenomeni dispervisi*, « Rend. Ist. Lomb. », vol. XLIV, sem. II (1911)).

Per il seguito è bene osservare che per campi elettrici sinoidali, $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \exp[-i\omega t]$, detta $\varepsilon_V(\omega)$ la costante dielettrica, definita dalla relazione $\mathbf{D}(t) = \varepsilon_V(\omega)\,\mathbf{E}(t)$, si ha per la (5):

$$\varepsilon_V(\omega) = \varepsilon_0 + \int_0^{t_0} \Phi(\tau) \exp[i\omega\tau]\, d\tau \,. \tag{7}$$

Si tenga presente che non si può escludere che $\varepsilon_V(\omega)$ sia diverso da $\varepsilon(\omega)$, in quanto in quest'ultima grandezza possono intervenire anche i termini dovuti alla conduttività del mezzo, esclusi invece in generale dalla (5).

3. Per il confronto di W_B e W_V è opportuno trasformare la espressione della densità di energia proposta da Volterra.

Introducendo nella (8) gli sviluppi in integrale di Fourier di $\mathbf{E}(t)$ e di $\mathbf{E}(t-\tau)$, si ha:

$$\begin{aligned} W_V = {} & \frac{1}{4\pi}\varepsilon_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\omega)\cdot\mathbf{E}^*(\omega') \exp[-i(\omega - \omega' t]\, d\omega\, d\omega' + \\ & + \frac{1}{4\pi}\int_0^{t_0} \Phi(\tau)\, d\tau \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\omega)\cdot\mathbf{E}^*(\omega') \exp[-i(\omega - \omega')\, t]\, d\omega\, d\omega' \,; \end{aligned} \tag{8}$$

scambiando l'ordine di integrazione nel secondo termine, ammettendo lecita tale operazione:

$$\begin{aligned} W_V = {} & \frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\omega)\cdot\mathbf{E}^*(\omega') \exp[-i(\omega - \omega')\, t]\,\cdot \\ & \left\{ \varepsilon_0 + \int_0^{t_0} \Phi(\tau) \exp[i(\omega - \omega')\,\tau]\, d\tau \right\} d\omega\, d\omega' \,; \end{aligned} \tag{9}$$

e infine per la (7) si ha:

$$W_V = \frac{1}{4\pi}\iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\omega)\cdot\mathbf{E}^*(\omega') \exp[-i(\omega - \omega')\, t]\, \varepsilon_V(\omega - \omega')\, d\omega\, d\omega' . \tag{10}$$

Confrontando ora la (10) con la (4) si deduce che condizione sufficiente per l'identità delle due espressioni è:

$$\frac{\omega\,\varepsilon_1(\omega) - \omega'\,\varepsilon_1(\omega')}{\omega - \omega'} = \varepsilon_V(\omega - \omega') \,. \tag{11}$$

Ma da questa si arriva subito, ponendo $\omega' = 0$, all'uguaglianza [(6)]:

$$\varepsilon_V(\omega) = \varepsilon_1(\omega) \,. \tag{12}$$

(6) Si nota che nel ragionamento del testo si suppone $\varepsilon_1(\omega')$ regolare per $\omega' \to 0$, quindi $\omega'\,\varepsilon_1(\omega') = 0$ per $\omega' \to 0$.

Infatti $\omega'\,\varepsilon_1(\omega')$ infinita per $\omega' \to 0$ è da escludere per la regolarità di $\varepsilon_V(\omega)$ e di $\varepsilon_1(\omega)$; se fosse la $\omega'\,\varepsilon(\omega') = a$, $\varepsilon(\omega')$ conterrebbe un termine del tipo a/ω' cioè non sarebbe simmetrica rispetto a ω.

Quindi $\varepsilon_V(\omega)$ deve essere reale per ogni ω.

Inoltre facendo tendere $\omega' \to \omega$ si ha:

$$\varepsilon_V(0) = \frac{d\,[\omega\,\varepsilon_I(\omega)]}{d\omega}\,, \tag{13}$$

e integrando:

$$\omega\varepsilon_I(\omega) = \omega\varepsilon_V(0) + c \quad , \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_V(0) + \frac{c}{\omega}\,. \tag{14}$$

Ma affinché la $\varepsilon_I(\omega)$ sia funzione simmetrica di ω deve essere $c = 0$ e si conclude quindi che:

$$\varepsilon_I(\omega) = \varepsilon_V(\omega) = \mathrm{cost}\,, \tag{15}$$

costante reale. Quindi l'ultimo termine della (7) deve essere costante per ogni ω, il che implica per note proprietà della trasformata di Fourier $\Phi(\tau) = 0$.

4. Potremo confermare con un esempio che effettivamente solo nel caso $\varepsilon_I(\omega) = \mathrm{cost}$, $\Phi(\tau) = 0$, si ha l'identità di W_V e W_B.

A questo scopo consideriamo nella (4) un campo elettrico per cui $\mathcal{E}(\omega)$ risulti diverso da zero solo in un intorno di ω_0, più precisamente negli intervalli $-\omega_0 - h$, $-\omega_0 + h$ e $\omega_0 - h$, $\omega_0 + h$, così che per maggior chiarezza scriveremo $\mathcal{E}(\omega, h)$.

Inoltre supporremo che $\mathbf{E}(\omega, h)$ sia sempre parallelo a un versore $\boldsymbol{k}$ e che questa si possa scrivere $\mathbf{E}(\omega, h) = \mathcal{E}(\omega, h)\,\boldsymbol{k}$ con $\mathcal{E}(\omega, h)$ reale e di segno costante (7). Supporremo poi che al tendere di h allo zero $\mathcal{E}(\omega, h)$ si comporti come una funzione impulsiva, cioè $\mathcal{E}(\omega, h)$ tenda per $h \to 0$ allo infinito in modo tale che risulti (8):

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_0 - h}^{\omega_0 + h} \mathbf{E}(\omega, h)\, d\omega = \frac{1}{2}\,\mathbf{E}\,; \tag{16}$$

dove $\mathbf{E}$ risulterà reale e di direzione costante. In particolare con le posizioni fatte si ottiene nel nostro caso:

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}\cos\omega_0 t\,; \tag{17}$$

cioè si arriva, come del resto è ben noto, ad un campo sinoidale.

Ora nella (4) l'integrale che esprime W_B per $h \neq 0$ risulta esteso ad un dominio costituito da quattro quadrati di lato $2h$ simmetricamente posti rispetto agli assi ω, ω'. Indicheremo questi con V_1, V_2, V_3, V_4 passando dal I al IV quadrante del piano ω, ω'.

L'integrale allora si può spezzare in quattro parti. Considero quella corrispondente al quadrato V_1 del I quadrante, indicandola con W_1:

$$W_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_{V_1} \mathbf{E}(\omega, h) \cdot \mathbf{E}^*(\omega', h) \exp[-i(\omega - \omega')t]\, \frac{\omega'\varepsilon_I(\omega') - \omega\varepsilon_I(\omega)}{\omega' - \omega}\, d\omega\, d\omega'. \tag{18}$$

(7) Ciò significa che $\mathbf{E}(t)$ deve essere la somma di termini sinusoidali di ugual fase.

(8) A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, Zanichelli 1943, pp. 58 sg.

Nel nostro caso per le posizioni fatte il prodotto scalare $\mathbf{E}(\omega, h)\cdot\mathbf{E}^*(\omega, k)$ risulta reale e di segno costante, possiamo quindi, applicando il teorema della media separatamente alla parte reale e alla parte immaginaria della funzione integranda, scrivere:

$$(19)\qquad W_1 = \cos(\xi - \xi')\, t\, \frac{\xi'\,\varepsilon(\xi') - \xi\varepsilon(\xi)}{\xi' - \xi}\; \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{V_1} \mathbf{E}(\omega, h)\cdot\mathbf{E}^*(\omega', h)\, d\omega\, d\omega' +$$

$$+ i \operatorname{sen}(\eta - \eta')\, t\, \frac{\eta'\,\varepsilon(\eta') - \eta\varepsilon(\eta)}{\eta' - \eta}\; \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{V_1} \mathbf{E}(\omega, h)\cdot\mathbf{E}^*(\omega', h)\, d\omega\, d\omega' ;$$

dove ξ, η e ξ', η' sono valori opportuni di ω e ω' interni all'intervallo $\omega_0 - h$, $\omega_0 + h$. Passando al limite per $h \to 0$; ξ, η e ξ', η' tendono tutti a ω_0, quindi il secondo termine tende a zero; nel primo termine il primo e il secondo fattore tendono rispettivamente a 1 e a $(d/d\omega\,[\omega\,\varepsilon_1(\omega)])_{\omega=\omega_0}$, nell'ultimo fattore l'integrale esteso a V_1 si riduce al prodotto di due integrali, uno fatto rispetto a ω, l'altro ad ω', e si vede facilmente che in base alla (16) tende a $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*/4$, che nel nostro caso essendo $\mathbf{E}$ reale è equivalente ad $E^2/4$; si ha quindi:

$$(20)\qquad \lim_{h\to 0} W_1 = \frac{1}{8}\left(\frac{d}{d\omega}[\omega\,\varepsilon_1(\omega)]\right)_{\omega=\omega_0} \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = \frac{E^2}{8}\left(\frac{d}{d\omega}[\omega\,\varepsilon_1(\omega)]\right)_{\omega=\omega_0}.$$

Analogamente applichiamo il teorema della media agli integrali corrispondenti a V_2, V_3, V_4, e passiamo al limite per $h \to 0$. Nel passaggio al limite in V_2 si hanno ξ ed η che tendono a $-\omega_0$ e ξ' ed η' che tendono a ω_0; in V_3, ξ ed η, ξ' ed η' che tendono a $-\omega_0$; in V_4, ξ ed η che tendono a ω_0, ξ' ed η' che tendono a $-\omega_0$. Tenendo conto di ciò e con considerazioni analoghe a quelle fatte per la (18) si arriva alla seguente espressione:

$$(21)\qquad W_B = \frac{E^2}{8}\left[\left(\frac{d}{d\omega}[\omega\,\varepsilon_1(\omega)]\right)_{\omega=\omega_0} + \varepsilon_1(\omega_0)\exp[2\,i\,\omega_0 t] +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{d}{d\omega}[\omega\,\varepsilon_1(\omega)]\right)_{\omega=-\omega_0} + \varepsilon_1(-\omega_0)\exp[-2\,i\,\omega_0 t]\right].$$

Da questa tenendo presente che $\varepsilon_1(\omega)$ è funzione pari come pure $d/d\omega\,[\omega\,\varepsilon_1(\omega)]$, derivata di una funzione dispari, si ha:

$$(22)\qquad W_B = \frac{E^2}{4}\left[\left(\frac{d}{d\omega}[\omega\,\varepsilon_1(\omega)]\right)_{\omega=\omega_0} + \varepsilon_1(\omega_0)\cos 2\,\omega_0 t\right].$$

Per il caso di Volterra partendo dalla (10) con lo stesso procedimento, facendo il limite per h tendente a zero si ottiene facilmente la seguente espressione:

$$(23)\qquad W_V = \frac{E^2}{8}\left[\varepsilon_V(2\,\omega_0)\exp[-2\,i\omega_0 t] + 2\,\varepsilon_V(0) + \varepsilon_V(-2\,\omega_0)\exp[2\,i\omega_0 t]\right];$$

che tenendo presente che $\varepsilon_V(-2\,\omega_0) = \varepsilon_V^*(2\,\omega_0)$ indicando con $\varepsilon_{V_1}(\omega)$ e $\varepsilon_{V_2}(\omega)$ rispettivamente le parti reale e immaginaria di $\varepsilon_V(\omega)$, si può anche scrivere:

$$(24)\qquad W_V = \frac{E^2}{8}\left[\varepsilon_V(0) + \varepsilon_{V_1}(2\,\omega_0)\cos 2\,\omega_0 t + \varepsilon_{V_2}(2\,\omega_0)\operatorname{sen} 2\,\omega_0 t\right].$$

Confrontando la (22) con la (20) si ha subito che $\varepsilon_{V_2}(2\,\omega_0) = 0$ e per l'arbitrarietà di $\omega_0, \varepsilon_{V_2}(\omega) = 0$, quindi $\varepsilon_V(\omega)$ è reale. Confrontando poi anche i valori medi delle (22) e (20) si ha per l'arbitrarietà di ω_0 che deve essere:

$$\frac{d}{d\omega}[\omega\,\varepsilon_1(\omega)] = \varepsilon_V(0)\,. \tag{25}$$

E quindi, in modo analogo a quanto fatto precedentemente si deduce:

$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_V(0) = \text{cost.} \tag{26}$$

In conclusione, pure non escludendo che il mezzo sia dispersivo per influenza della conducibilità, si può però affermare che la coincidenza fra le due espressioni dell'energia può verificarsi solo in casi poco rilevanti, e che probabilmente non si presentano nella pratica.

5. Osserviamo che l'espressione stabilita da Borgnis può avere interesse perché nel caso di un gas ionizzato con $\mathbf{E}\,(t)$ sinoidale, rappresenta effettivamente l'energia elettrica del gas non ionizzato sommata con l'energia cinetica.

È da notare però che già basta passare allo stesso caso di un gas ionizzato in cui però si consideri anche l'effetto degli urti, sia pure schematiazzto in forma elementare, perché la medesima espressione non sia più uguale alla somma delle energie elettrica e cinetica.

Per un gas ionizzato supposto composto di elettroni e molecole, nel caso di campo sinoidale, si possono scrivere le seguenti relazioni (9):

$$\mathbf{I} = \mathrm{N}\rho_e\,\mathbf{V} + i\omega\,\varepsilon_0\,\mathbf{E}\,, \tag{27}$$

$$i\,\omega m\,\mathbf{V} = \rho_e\,\mathbf{E} - m\nu\,\mathbf{V}\,; \tag{28}$$

indicando ora con: $\mathbf{I}$ il vettore densità di corrente totale, ε_0 la costante dielettrica del vuoto, $\mathbf{V}$ la velocità media degli elettroni, ρ_e la loro carica, N il loro numero per unità di volume, m la loro massa, ν il numero degli urti per unità di tempo.

Da queste relazioni risulta la seguente espressione per la costante dielettrica complessa:

$$\varepsilon\,(\omega) = \varepsilon_0 - \frac{\mathrm{N}\rho_e^2}{m\,(\nu^2+\omega^2)} - i\,\frac{\mathrm{N}\rho_e^2}{m\,(\nu^2+\omega^2)}\,\frac{\nu}{\omega}\,; \tag{29}$$

inoltre:

$$\mathbf{V} = \rho_e\,\mathbf{E}\,\frac{\nu - i\omega}{m\,(\nu^2+\omega^2)}\,; \tag{30}$$

infine la media della somma dell'energia elettrica e dell'energia cinetica risulta:

$$\overline{\mathrm{W}} = \varepsilon_0\,\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{4} + m\mathrm{N}\,\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}^*}{4} = \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{4}\left[\varepsilon_0 + \frac{\mathrm{N}}{m}\,\frac{\rho_e^2}{(\nu^2+\omega^2)}\right]. \tag{31}$$

(9) D. GRAFFI, *Lezioni di onde elettromagnetiche*. Istituto Superiore delle Poste e Telecomunicazioni; 1956–57, pp. 87 sg.

Secondo l'espressione di Borgnis si avrebbe:

$$\overline{W}_B = \frac{d}{d\omega}\left[\omega\,\varepsilon_1(\omega)\right]\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{4} = \tag{32}$$

$$= \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{4}\left[\varepsilon_0 - \frac{N\rho_e^2}{m(\nu^2+\omega^2)} + \omega\frac{N\rho_e^2}{[m(\nu^2+\omega^2)]^2}\,2\,m\omega\right] =$$

$$= \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*}{4}\left[\varepsilon_0 + \frac{N\rho_e^2}{m(\nu^2+\omega^2)} - 2\,\nu^2\frac{N\rho_e^2}{m(\nu^2+\omega^2)^2}\right];$$

che per l'ultimo termine non coincide con la (31).