Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pasquale Mastrogiacomo

Su certi sistemi algebrici di rette di S_n

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.1, p. 43–50.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_1_43_0¿

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1962.

Geometria. — *Su certi sistemi algebrici di rette di* S_n. Nota (*) di PASQUALE MASTROGIACOMO, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

Recentemente [5] (1) E. Bompiani ha determinato i complessi quadratici e cubici di rette di S_n $(n > 3)$ armonici, cioè mutati in sé dalle omologie armoniche determinate da un $(n+1)$–edro, e successivamente [6] ha risolto l'analogo problema relativamente a spazi subordinati qualsiansi S_{h-1} di S_n. Particolari complessi armonici di rette di S_3 (2) sono notoriamente [3] i complessi tetraedrali. In una Nota [8] in corso di stampa ho generalizzato i complessi tetraedrali di S_3 introducendo in S_{h+3} un tipo di complesso quadratico di rette che nel caso più generale e per $h = 0$ è un complesso tetraedrale. Ho inoltre dimostrato che sempre nel caso più generale e per $h \geq 1$ siffatti complessi hanno per *varietà centrali* (luoghi dei centri) le note ([2] e [4]) $S_{h-1} - V_h^4$ razionali normali (irriducibili) di S_{h+3} e che ciascun d'essi è univocamente determinato dalla rispettiva varietà centrale.

In questo lavoro riassumo brevemente (nn. 1, 2, 3, 4) i principali risultati conseguiti nella suddetta Nota e ne determino (nn. 4 e sgg.) una ulteriore estensione introducendo in S_{n+h} $(n \geq 3)$ un sistema algebrico di rette, che per $n = 3$ si riduce al complesso introdotto ed esaminato nella Nota [8]. Provo anche (n. 6) che siffatti sistemi di rette, nel caso più generale e per $h \geq 1$, hanno come varietà centrali le $S_{h-1} - V_h^{n+1}$ ([2] e [4]) razionali normali (irriducibili) di S_{n+h}.

1. Sia Ω un'omografia non degenere di S_3 rappresentata dalle equazioni

$$\rho x'^{\,i} = a^i_{.k} x^k , \qquad (i , k = 1 , 2 , 3 , 4 ; \rho \neq 0 \text{ e Det. } (a^i_{.k}) \neq 0),$$

nelle quali si è sottinteso il simbolo di sommazione rispetto all'indice k ripetuto (in alto e in basso) e con x^i si sono indicate le coordinate proiettive omogenee di un generico punto.

È sostanzialmente noto [3] che

I. – *Il luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti in un'omografia* Ω *non degenere di* S_3 *è un complesso quadratico.*

(*) Il presente lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 1 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1961–62.

(**) Nella seduta del 13 gennaio 1962.

(1) Le [ ] si riferiscono alla Bibliografia alla fine del lavoro.

(2) I complessi armonici di rette di S_3 del 2° ordine sono stati largamente studiati da BATTAGLINI [1], C. SEGRE [12], A. TERRACINI [16], E. BOMPIANI [5] ed altri. I complessi di rette del 1° e del 2° ordine di S_3 sono stati esaminati a fondo da F. KLEIN [7]. Ricordo inoltre che uno studio organico dei complessi algebrici di rette di ordine m di S_n è stato iniziato per $m \geq 1$ ed $n \geq 2$ da B. SEGRE [9] e da questi completato soltanto per i complessi quadratici di rette di tipo generale di S_4 ([10] e [11]). Si confronti infine la Memoria [14] *Sulla geometria della retta* ... di C. SEGRE.

Nella Nota [8] ho provato che l'equazione di questo complesso è la

$$(1.1) \qquad p^{[12} a^{34]}_{..\alpha\beta}\, p^{\alpha\beta} = 0\,, \qquad (\alpha < \beta)\ ^{(3)},$$

in cui la sommatoria rispetto agli indici α e β è estesa a tutte le combinazioni semplici di classe due degli interi 1, 2, 3, 4 ed il simbolo $a^{ij}_{..hk}$ rappresenta il minore del 2° ordine contenuto nelle righe di indici i e j e nelle colonne di indici h e k della matrice $(a^{i}_{.k})$ di Ω.

È ovvio che il complesso (1.1), se Ω è di tipo generale, è un complesso tetraedrale, avente per tetraedro fondamentale quello determinato dai punti uniti di Ω.

In generale si prova [8] che:

Il complesso quadratico C *generato da un'omografia* Ω *non denegere di* S_3 *a norma della* I *è irriducibile se, e solo se, le radici caratteristiche di* Ω *hanno tutte rango tre. Se invece il rango minimo delle radici caratteristiche di* Ω *è due il complesso* C *degenera in due complessi lineari speciali nucleati ed infine se il suddetto rango minimo è minore di due* C *è indeterminato.*

Vi sono pertanto cinque tipi proiettivamente distinti di complessi C irriducibili, generati per la I dai vari tipi di omografie Ω di S_3, corrispondenti ai casi in cui Ω possiede rispettivamente quattro radici caratteristiche semplici, una radice doppia di rango tre e due semplici, due radici doppie di rango tre, una radice tripla di rango tre ed una semplice ed infine una radice quadrupla di rango tre. Nel primo caso C è un complesso tetraedrale, negli altri casi i corrispondenti complessi C li diremo [8] *pseudotetraedrali* rispettivamente di 1ª, 2ª, 3ª e 4ª specie.

2. Ci proponiamo ora di generalizzare i suddetti complessi. A tal fine dati in S_{3+h} $(h \geq 1)$ due S_{h-1} tra loro indipendenti, assumiamoli come spazi fondamentali $E_{h-1}(O_1 O_2, \cdots, O_h)$ (4) ed $E'_{h-1}(O_5 O_6, \cdots, O_{h+4})$ rispettivamente. Un generico S_h per E_{h-1} sarà rappresentabile con le *tre* equazioni

$$\lambda^{\alpha} x^{h+\beta} = \lambda^{\beta} x^{h+\alpha}\,, \qquad (\beta \text{ fisso} \neq \alpha \text{ variab.}\,;\ 1 \leq \alpha\,, \beta \leq 4\,;\ \lambda^{\beta} \neq 0)\,,$$

ed analogamente un generico S_h per E'_{h-1} con le *tre* equazioni

$$\lambda'^{i} x^{j} = \lambda'^{j} x^{i}\,, \qquad (j \text{ fisso} \neq i \text{ variab.}\,;\ 1 \leq i\,, j \leq 4\,;\ \lambda'^{j} \neq 0)\,.$$

(3) Ricordo che, considerata una qualsiasi espressione del tipo $a^{1,2,\cdots,n}$, si indica con $a^{[1,2,\cdots,n]}$ l'espressione

$$a^{[1,2,\cdots,n]} = (1/n!) \sum_{r_1 \cdots r_n}^{1 \cdots n} (-1)^{r} a^{r_1,\cdots,r_n}$$

in cui la sommatoria rispetto agli indici $r_1, r_2, \cdots, r_n$ è estesa a tutte le permutazioni semplici dei numeri naturali $1, 2, \cdots, n$ e l'indice r è il numero delle inversioni della permutazione $r_1, r_2, \cdots, r_n$ rispetto alla permutazione $1, 2, \cdots, n$. Ricordo inoltre che l'operazione che conduce da $a^{1,2,\cdots,n}$ ad $a^{[1,2,\cdots,n]}$ si chiama *alternazione*.

(4) Con O_i si è indicato il punto di coordinate proiettive omogenee tutte nulle tranne la i-esima.

Sia inoltre Ω una proiettività non degenere, di equazioni

$$\rho\lambda'^{i} = a^{i}_{.k}\lambda^{k}, \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4; \rho \neq 0 \text{ e Det. } (a^{i}_{.k}) \neq 0),$$

tra le due stelle Σ e Σ' degli S_h per E_{h-1} ed E'_{h-1} rispettivamente.

Si prova [8] che

II. – *Fissata in* S_{h+3} $(h \geq 1)$ [5] *una proiettività* Ω *non degenere tra le due stelle degli* S_h *per due* S_{h-1} *tra loro indipendenti, il luogo delle rette incidenti* S_h *corrispondenti in* Ω *è un complesso quadratico.*

L'equazione di questo complesso, nel prefissato riferimento, è la

$$p^{[12}\, a^{34]}_{..\alpha\beta}\, p^{\alpha+h\,\beta+h} = 0, \qquad (\alpha < \beta), \tag{2.1}$$

con lo stesso significato dei simboli e le stesse convenzioni adottate nella (1.1).

Si deduce subito che per $h \geq 5$ il complesso quadratico C di equazione (2.1) può ottenersi proiettando dall'S_{h-5} $(O_5 O_6, \cdots, O_h)$, intersezione degli spazi–asse delle due assegnate stelle di S_h, il complesso quadratico C' subordinato da C stesso in un qualunque S_7 (ad esempio quello di equazioni $x^5 = x^6 = \cdots = x^h = 0$) sghembo col suddetto S_{h-5} e che quindi la varietà centrale di C è l'S_{h-5}–cono proiettante dal medesimo S_{h-5} la varietà centrale di C'.

Supponendo Ω di tipo generale ed h intero qualunque ≥ 1 si prova [8] che, fissando un opportuno riferimento proiettivo, l'equazione (2.1) del complesso C generato da Ω diviene

$$\delta^{1\,2\,3\,4}_{\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon}\, p^{\alpha\beta}\, p^{\gamma+h\,\varepsilon+h} = 0 \text{ [6]}, \tag{2.2}$$

in cui la sommatoria rispetto agli indici $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ è estesa a tutte le permutazioni semplici di 1, 2, 3, 4.

Inoltre la *varietà centrale* del complesso C coincide col *nucleo* [7] di Ω ed ha le equazioni

$$x^{h+i} = \rho x^{i}, \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{2.3}$$

Segue perciò che

III. – *Fissata in* S_{h+3} $(h \geq 1)$ *una proiettività* Ω *di tipo generale tra le due stelle* Σ *e* Σ' *degli* S_h *per due* S_{h-1} *fra loro indipendenti, il luogo delle rette incidenti* S_h *corrispondenti in* Ω *è un complesso quadratico irriducibile* [8], *la cui varietà centrale coincide col nucleo di* Ω *ed è una* S_{h-1} — V^4_h *razionale normale* (*irriducibile*).

(5) Si osservi che la II e la (2.1), purché Ω rappresenti un'omografia di S_3, continuano a sussistere anche per $h = 0$, riducendosi rispettivamente alla I e alla (1.1).

(6) Ricordo che il simbolo di Murnagham $\delta^{i\,j\,r\,s}_{\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon}$ (generalizzazione del simbolo δ^{i}_{k} di Kronecker) è uguale $+1$ o -1 se $ijrs$ e $\alpha\beta\gamma\varepsilon$ sono due permutazioni semplici degli stessi numeri naturali rispettivamente della stessa classe o di classe diversa; $\delta^{i\,j\,r\,s}_{\alpha\,\beta\,\gamma\,\varepsilon}$ è invece nullo in ogni altro caso.

(7) *Per nucleo della proiettività* Ω si intende il luogo dei punti di intersezione degli S_h (incidenti) corrispondenti in Ω.

(8) L'irriducibilità del complesso segue facilmente, oltre che dall'evidente irriducibilità della sua equazione, anche dall'irriducibilità della sua varietà centrale.

3. Supponiamo ora $h = 1$. In tal caso la II diventa:

II_1. – *Data in* S_4 *una proiettività non degenere* Ω *tra le due stelle* Σ *e* Σ' *delle rette per due punti distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in* Ω *è un complesso quadratico.*

In corrispondenza ai diversi tipi di proiettività Ω si hanno ovviamente altrettanti tipi, tra loro proiettivamente distinti, di complessi quadratici C generati da Ω a norma della II_1.

Se Ω è di tipo generale, cioè se non esiste alcun iperpiano unito (cioè luogo di rette corrispondenti) in Ω, per la III si ha che

III_1. – *Data in* S_4 *una proiettività* Ω *di tipo generale tra le due stelle delle rette per due punti distinti, il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in* Ω *è un complesso quadratico irriducibile* (8), *la cui varietà centrale coincide col nucleo* (7) *di* Ω *ed è una quartica razionale normale (irriducibile).*

Viceversa si verifica [8] che

IV_1. – *Data in* S_4 *una quartica razionale normale (irriducibile)* C^4, *esiste un solo complesso quadratico di rette, anch'esso irriducibile* (8), *avente per varietà centrale la* C^4 *assegnata.*

Trascurando per brevità l'esame dei casi particolari, effettuato con completezza nella Nota [8], noto soltanto che in questi casi la varietà centrale del complesso C, se C stesso è irriducibile, coincide ancora col nucleo della proiettività Ω che lo genera a norma della II_1 ed è costituita da una quartica variamente degenere. Se invece il complesso C è riducibile si prova [8] che la sua varietà centrale è costituita da una coppia di piani distinti e quindi che il complesso stesso degenera in due complessi lineari speciali nucleati aventi per nuclei ciascuno uno dei due piani suddetti. Infine, se la proiettività Ω subordina l'identità nella stella dei piani (e degli iperpiani) comuni alle due stelle di rette assegnate Σ e Σ' il complesso C generato da Ω è indeterminato.

Avverto inoltre che, come nel caso generale (cfr. IV_4), anche negli altri casi si verifica [8] che i corrispondenti complessi sono univocamente determinati dalle rispettive varietà centrali.

Aggiungo che nella Nota [8] ho esaminato alcune proprietà dei vari tipi di complessi C su accennati determinandone, tra l'altro, i piani e gli iperpiani totali, e di alcuni di questi complessi ho assegnato altre due generazioni proiettive.

4. Tornando a supporre $h \geq 1$ e Ω di tipo generale, al fine di invertire la III, ricordo [4] anzitutto che ogni S_{h-1}—V_h^4 razionale normale (irriducibile) di S_{h+3} è sempre il nucleo (7) di una proiettività tra le due stelle degli S_h aventi per spazi–asse due distinti qualunque suoi S_{h-1} generatori. Ne consegue subito, per la III, l'esistenza di almeno un complesso quadratico di rette C avente per varietà centrale una assegnata S_{h-1}—V_h^4 razionale normale (irriducibile) di S_{h+3}. Si prova poi l'unicità di siffatti complessi C segando con un generico S_4 e tenendo conto della IV_1. Si ha perciò che

IV. – *Assegnata in* S_{h+3} $(h \geq 1)$ *una* S_{h-1}—V_h^4 *razionale normale (irriducibile) esiste un solo complesso quadratico di rette, pur esso irriducibile* (8), *avente la data* S_{h-1}—V_h^4 *come varietà centrale.*

La proprietà ricordata all'inizio di questo numero e la III mostrano una generazione proiettiva di questo complesso.

Osservo infine che dalla IV segue immediatamente che *le omografie di* S_{h+3} *che mutano in sé il complesso* (2.2) *sono tutte e sole le omografie di* S_{h+3} *che mutano in sé la varietà centrale del complesso medesimo.*

5. Mi propongo ora di estendere i risultati conseguiti nella Nota [8] e riassunti nei numeri precedenti.

A tal fine considerati in S_{n+h} $(n \geq 3\,,\, h \geq 1)$ due S_{h-1} tra loro indipendenti, si assumano come spazi fondamentali $E_{h-1}(O_1\, O_2\,, \cdots, O_h)$ ed $E'_{h-1}\,(O_{n+2}\, O_{n+3}\,, \cdots, O_{n+h+1})$. Un generico S_h per E_{h-1} sarà rappresentabile con le n equazioni indipendenti ottenute dalla

$$\lambda^\alpha\, x^{h+\beta} = \lambda^\beta\, x^{h+\alpha} \qquad (\lambda^\beta \neq 0) \tag{5.1}$$

per β fissato tra 1 ed $n+1$ e $\alpha \neq \beta$ successivamente uguale a $1\,, 2\,, \cdots, n+1$.

Analogamente il generico S_h per E'_{h-1} sarà rappresentabile con le n equazioni indipendenti

$$\lambda'^i\, x^j = \lambda'^j\, x^i, \qquad (j \text{ fisso} \neq i \text{ variab.}\,;\ 1 \leq i\,, j \leq n+1\,;\ \lambda'^j \neq 0). \tag{5.2}$$

Siano inoltre

$$\rho\lambda'^i = a^i_{.k}\lambda^k, \qquad (i\,, k = 1\,, 2\,, \cdots, n+1\,;\ \mathrm{Det.}\,(a^i_{.k}) \neq 0) \tag{5.3}$$

le equazioni di una proiettività Ω non degenere tra le due stelle Σ e Σ' degli S_h per E_{h-1} ed E'_{h-1} rispettivamente.

Al fine di determinare *il luogo delle rette incidenti* S_h *di* Σ *e di* Σ' *corrispondenti in* Ω, osservo che affinché una retta r incida l' S_h (5.1) occorre e basta che le sue coordinate plückeriane p^{ik} soddisfino le $n-1$ condizioni indipendenti ottenute dalla

$$\lambda^\gamma\, p^{\alpha+h\ \beta+h} + \lambda^\beta\, p^{\gamma+h\ \alpha+h} + \lambda^\alpha\, p^{\beta+h\ \gamma+h} = 0 \tag{5.4}$$

fissando α e β, con $\alpha \neq \beta$, tra gli interi $1\,, 2\,, \cdots, n+1$ ed assegnando a γ i rimanenti valori tra gli stessi interi.

Analogamente imponendo che la retta r incida l' S_h (5.2) si ottengono le $n-1$ condizioni essenziali

$$\lambda'^{[r}\, p^{ij]} = 0 \qquad (i\,, j \text{ fissi} \neq r \text{ variab.}\,;\ i \neq j\,;\ 1 \leq r\,, i\,, j \leq n+1)\,. \tag{5.5}$$

Per le (5.3) si ha subito che il luogo richiesto è rappresentato dal sistema composto dalle (5.4) e dalle

$$p^{[ij}\, a^{r]}_{.k}\, \lambda^k = 0 \qquad (k = 1\,, 2\,, \cdots, n+1)\,, \tag{5.6}$$

o anche dal sistema equivalente composto dalle (5.4) e dalle

$$\lambda^\alpha\, p^{[ij}\, a^{r]}_{.k}\, p^{k+h\ \beta+h} + \lambda^\beta\, p^{[ij}\, a^{r]}_{.k}\, p^{\alpha+h\ k+h} = 0\,. \tag{5.7}$$

Si riconosce poi facilmente che per la compatibilità di questo sistema occorre e basta che siano compatibili le (5.7), per la qual cosa è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le $n-2$ condizioni essenziali ottenute dalla

$$p^{\alpha+h\ \beta+h}\, p^{k+h\ l+h}\, p^{[ij}\, a^{r]}_{.k}\, p^{[ij}\, a^{s]}_{.l} = 0$$

o equivalentemente dalla

$$p^{\alpha+h\ \beta+h}\, p^{ij}\, p^{[ij}\, a^{rs]\cdot\cdot}_{\cdot\cdot kl}\, p^{k+h\ l+h} = 0$$

fissando r, i, j, diversi tra loro a due a due, tra gli interi $1, 2, \cdots, n+1$ ed assegnando ad $s\ (\neq i, j, r)$ i rimanenti tra gli stessi interi.

In definitiva, poiché il fattore $p^{ij}\, p^{h+\alpha\ h+\beta}$ è certamente non nullo [9], il luogo richiesto è rappresentato dal sistema delle $n-2$ equazioni essenziali ottenute dalla

$$p^{[ij}\, a^{rs]\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}\, p^{\alpha+h\ \beta+h} = 0 \qquad (\alpha < \beta)\ ^{(10)} \tag{5.8}$$

sostituendo a i, j, r una qualunque combinazione semplice di classe tre degli interi $1, 2, \cdots, n+1$ ed assegnando ad s i rimanenti tra questi interi [11].

Concludendo si ha quindi che:

V. – *Assegnata in* S_{n+h} $(n \geq 3, h \geq 1)$ [12] *una proiettività* Ω *non degenere tra le due stelle* Σ *e* Σ' *degli* S_h *per due* S_{h-1} *tra loro indipendenti il luogo delle rette incidenti* S_h *corrispondenti in* Ω *è il sistema* C_{n-2} *delle rette comuni ad* $n-2$ *complessi quadratici indipendenti.*

Si deduce subito dalle (5.8) che questo sistema di rette C_{n-2}, generato a norma della V da Ω, per $h \geq n+2$ può ottenersi proiettando dall' $S_{h-n-2}\,(O_{n+2}\, O_{n+3}, \cdots, O_h)$, intersezione degli spazi–asse delle due assegnate stelle di S_h, il sistema di rette C'_{n-2} subordinato da C_{n-2} in un qualunque

(9) Si osservi infatti che se ad esempio fosse $p^{ij} = 0\ (i < j, 1 \leq i, j \leq n+1)$ ogni retta incidente l'$S_{n+h-2}\,(O_1\, O_2, \cdots, O_{i-1}\, O_{i+1}, \cdots, O_{j-1}, O_{j+1}, \cdots, O_{n+2}, \cdots, O_{n+h+1})$ incontrerebbe coppie di S_h corrispondenti in Ω. Ciò implicherebbe che ad ogni S_h della stella Σ' contenuto nel suddetto S_{n+h-2} corrisponderebbero in Ω^{-1} tutti gli S_h (della stella Σ) ad esso incidenti, contro l'ipotesi che Ω sia non degenere. In modo analogo si prova che risulta $p^{h+\alpha\ h+\beta} \neq 0$.

(10) Avverto che nella (5.8) la sommatoria rispetto agli indici α e β è estesa a tutte le combinazioni semplici di classe *due* dei numeri naturali $1, 2, \cdots, n+1$. A parte ciò il significato dei simboli e le convenzioni sono le stesse adottate nella (1.1).

(11) Si osservi che da queste $n-2$ equazioni (5.8) consegue la validità di ogni altra equazione ottenuta dalla (5.8) sostituendo ad i, j, r, s una qualsiasi combinazione semplice di classe quattro degli interi $1, 2, \cdots, n+1$. Si ricordi infatti ch'esse sono state ottenute imponendo che la matrice dei coefficienti delle (5.7) abbia rango minore di due. Ne discende la validità delle equazioni ottenute dalle (5.8) fissando i, j distinti tra gli interi $1, 2, \cdots, n+1$ ed assegnando ad r, s due qualsiansi distinti dei rimanenti tra gli stessi interi. Scambiando poi l'indice j con l'indice r, ed infine l'indice i con l'indice r, l'asserto risulta completamente provato.

(12) Si prova che la V e le (5.8), purché Ω rappresenti un'omografia non degenere di S_n, continuano a sussistere anche per $h = 0$ (cfr. il n. 7 del presente lavoro), riducendosi in tal caso rispettivamente alla VII e alle (7.1).

S_{2n+1} (ad esempio quello di equazioni $x^{n+2} = x^{n+3} = \cdots = x^h = 0$) sghembo col predetto S_{h-n-2} e quindi che la *varietà centrale* di C_{n-2} è l'S_{h-n-2}–cono proiettante dal medesimo S_{h-n-2} la varietà centrale di C'_{n-2}.

6. Se Ω è di tipo generale si prova [13] che, per ogni valore intero di $h \geq 1$, è lecito assumere i corrispondenti in Ω degli iperpiani (di Σ) di equazioni rispettive:

$$x^{h+1} = 0 \quad , \quad x^{h+2} = 0 , \cdots , x^{h+n+1} = 0 \quad , \quad x^{h+1} + x^{h+2} + \cdots + x^{h+n+1} = 0$$

come iperpiani di equazioni rispettive

$$x^1 = 0 \ , \ x^2 = 0 , \cdots , x^{n+1} = 0 \quad , \quad x^1 + x^2 + \cdots + x^{n+1} = 0 .$$

Ciò fatto, si deduce facilmente che le equazioni (5.8) del sistema di rette C_{n-2} assumono la forma canonica:

$$\delta^{i\,j\,r\,s}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon}\, p^{\alpha\beta}\, p^{\gamma+h\ \varepsilon+h} = 0 , \tag{6.1}$$

in cui le limitazioni per gli indici i, j, r, s sono quelle valide nelle (5.8).

Ne consegue che la *varietà centrale* del sistema C_{n-2} coincide con il *nucleo* di Ω ed è rappresentata dalle equazioni

$$x^{h+i} = \rho x^i \qquad (i = 1 , 2 , \cdots , n+1) , \tag{6.2}$$

le quali mostrano ch'essa è il luogo degli ∞^1 S_{h-1} di intersezione degli iperpiani corrispondenti degli $n+1$ fasci indipendenti di iperpiani (6.2), riferiti tra loro proiettivamente. Da ciò o dalla sua generazione proiettiva mediante Ω segue (cfr. [2], [4], [13] e [15]) ch'essa è una S_{h-1}—V_h^{n+1} irriducibile, normale e razionale sia come luogo dei suoi ∞^h punti che come luogo dei suoi ∞^1 S_{h-1} generatori.

Concludendo si ha quindi che

VI. – *Fissata in* S_{n+h} ($n \geq 3$, $h \geq 1$) *una proiettività* Ω *di tipo generale tra le due stelle* Σ *e* Σ' *degli* S_h *per due* S_{h-1} *tra loro indipendenti, il luogo delle rette incidenti* S_h *corrispondenti in* Ω *è il sistema algebrico delle rette comuni ad* $n - 2$ *complessi quadratici irriducibili* [14] *indipendenti, avente per varietà centrale una* S_{h-1}—V_h^{n+1} *razionale normale* (*irriducibile*).

Si noti che per $n = 3$ la V e la VI diventano rispettivamente la II e la III.

7. Infine, allo scopo di estendere la I e la (1.1), si consideri in S_{n+1} ($n \geq 3$) una proiettività Ω non degenere tra le due stelle Σ e Σ' delle rette per due punti coincidenti $S \equiv S'$ e si assuma il centro $S \equiv S'$ delle due stelle come

(13) In modo analogo a quello seguito nella [8] per conseguire lo stesso risultato in S_{h+3}.

(14) Cfr. nota (8).

punto Q_{n+2}. Seguendo lo stesso procedimento sviluppato nel n. 5 per provare la V, si ottiene che

Il luogo delle rette incidenti rette corrispondenti in Ω *è il sistema algebrico di tutte e sole le rette comuni agli* $n-2$ *complessi quadratici indipendenti di equazioni*

$$p^{[ij} a^{rs]\cdot\cdot}_{\cdot\cdot\alpha\beta}\, p^{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha < \beta), \tag{7.1}$$

in cui il significato dei simboli e le convenzioni sono le stesse adottate nelle (5.8).

Ne consegue che

VII. – *Assegnata in* S_n $(n \geq 3)$ *un'omografia non degenere* Ω, *il luogo delle rette congiungenti punti corrispondenti in* Ω *è il sistema algebrico di tutte e sole le rette comuni agli* $n-2$ *complessi quadrati indipendenti di equazioni* (7.1).

Risulta con ciò provata l'asserzione fatta nella nota (12).

Si noti infine che i punti uniti di Ω sono sicuramente centri del suddetto sistema di rette e che essi sono tutti e soli i centri del sistema se Ω è di tipo generale.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. BATTAGLINI, *Sui sistemi di rette di 2° grado*, « Gior. Mat. Battaglini », 6, 7 (1866).

[2] A. BELLATALLA, *Sulle varietà razionali normali composte di* ∞^1 *spazi lineari*, « Atti Acc. Sci. Torino », Cl. Sci. fis., mat. e nat., *36* (1901).

[3] E. BERTINI, *Complementi di geometria proiettiva*, Zanichelli, Bologna (1927).

[4] E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Principato, Messina (1923).

[5] E. BOMPIANI, *Su certi complessi quadratici e cubici di rette*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, *24*, fasc. 3 (1958).

[6] E. BOMPIANI, *Complessi quadratici e cubici di spazi dotati di omologie armoniche*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, *24*, fasc. 4 (1958).

[7] F. KLEIN, *Zur theorie der Linienkomplexe des I und II Grades*, « Mathem. Annalen » (1870), Bd. II.

[8] P. MASTROGIACOMO, *Su alcuni tipi di complessi quadratici di rette di* S_n, « Riv. Mat. Univ. Parma » (2), *2* (1961).

[9] B. SEGRE, *Sui complessi algebrici di rette* S_n, « Rend. Acc. Lincei », ser. V, *33* (1924).

[10] B. SEGRE, *I complessi quadratici di rette di* S_n, « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, *2* (1925).

[11] B. SEGRE, *Studio dei complessi quadratici di rette di* S_4, « Atti Ist. Ven. Sci. Lett. Arti », II (1928–29).

[12] C. SEGRE, *Su una trasformazione irrazionale dello spazio*, « Gior. Mat. Battaglini », *21* (1883).

[13] C. SEGRE, *Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque*, « Atti Acc. Sci. Torino », Cl. Sci. fis., mat. e nat., *19* (1884).

[14] C. SEGRE, *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche*, « Memoria Acc. Sci. Torino » (2), *36* (1884).

[15] C. SEGRE, *Sulle varietà a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani*, « Atti Acc. Sci. Torino », Cl. Sci. fis., mat. e nat., *21* (1885).

[16] A. TERRACINI, *Un'osservazione su un passo di un lavoro giovanile di C. Segre*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (3), *12* (1957).