Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Samuel Zaidman

Soluzioni limitate e quasi-periodiche dell'equazione del calore non-omogenea. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **32** (1962), n.1, p. 30–37.

Accademia Nazionale dei Lincei

¡http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1962_8_32_1_30_0¿

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Soluzioni limitate e quasi-periodiche dell'equazione del calore non-omogenea.* Nota II di S. ZAIDMAN, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

§ 4. In questo paragrafo dimostreremo due teoremi di quasi-periodicità per le soluzioni deboli limitate da $t \in J$ a $L^2(R^n)$ dell'equazione (2,3). Si ha anzitutto il

TEOREMA IV.1. – *Sia* $F(s, t)$ *debolmente quasi-periodica da* $t \in J$ *a* $L^2(R^n)$. *Allora ogni soluzione* $U(s, t)$ *della* (2,3), *che è definita e limitata su* $t \in J$ *risulta debolmente quasi-periodica, da* $t \in J$ *a* $L^2(R^n)$.

Osservazione. – L'esistenza di una tale soluzione è dimostrata nel Teorema III.1, nell'ipotesi che esista una soluzione debole limitata della (2,3) su un semiasse, $t \geq t_0 \in J$.

Dimostrazione. – Il procedimento che usiamo è ispirato da Favard [6] (vedasi anche [7] e [2–*a*]).

Prendiamo una successione $\{h_n\}_1^\infty \subset J$; esiste una sottosuccessione $\{h'_n\}_1^\infty \subset \{h_n\}_1^\infty$ tale che la successione $\{F(s, t + h'_n)\}_1^\infty$ converga uniformemente su $t \in J$ in $L^2(R^n)$-debole. Con una successione di estrazioni e prendendo la successione diagonale, si arriva a una sottosuccessione $\{h_{n_p}\}_1^\infty$ di $\{h'_n\}_1^\infty$, tale che:

$\{F(s, t + h_{n_p})\}_1^\infty$ converga uniformemente su $t \in J$ in $L^2(R^n)$-debole;

per ogni $N = 0, 1, 2, \cdots$, converga, in $L^2(R^n)$-debole, la successione $\{U(s, N + h_{u_p})\}_1^\infty$:

$$\lim_{p \to \infty}{}^* U(s, -N + h_{n_p}) = U_N(s).$$

Dalla Prop. II.2 segue la convergenza in $L^2(R^n)$-debole, della successione $\{U(s, t + h_{n_p})\}_1^\infty$, per un t qualsiasi in J. La nostra tesi sarà provata se dimostreremo che questa convergenza è *uniforme* in J. Infatti, se ciò non è, esistono: una funzione $H_0(s) \in L^2(R^n)$, un $\alpha > 0$, una successione $\{t_p\}_1^\infty$ e due sottosuccessioni $\{h'_{n_p}\} \subset \{h_{n_p}\}$, $\{h''_{n_p}\} \subset \{h_{n_p}\}$, per le quali è valida la diseguaglianza

$$(4,1) \qquad \left| \int_{R^n} [U(s, t_p + h'_{n_p}) - U(s, t_p + h''_{n_p})] H_0(s) \, ds \right| > \alpha, \qquad (p = 1, 2, \cdots).$$

Con le solite estrazioni successive, possiamo allora trovare una sottosuccessione $(p')_1^\infty \subset (p)_1^\infty$, tale che siano convergenti in L^2-debole, le successioni

$$(4,2) \qquad \{U(s, -N + t_{p'} + h'_{n_{p'}})\} \quad , \quad \{U(s, -N + t_{p'} + h''_{n_{p'}})\},$$

$$\text{per} \quad N = 0, 1, 2, \cdots$$

(*) Nella seduta del 9 dicembre 1961.

Possiamo anche supporre, con altre due estrazioni successive, che siano convergenti uniformemente su $t \in J$ in L^2-debole (per la quasi-periodicità debole) le due successioni

$$\{F(s, t + t_{p'} + h'_{n_p})\}_1^\infty \quad , \quad \{F(s, t + t_{p'} + h''_{n_{p'}})\}_1^\infty . \tag{4,3}$$

Se ricordiamo poi che la successione $\{F(s, t + h_{n_p})\}_1^\infty$ era già scelta uniformemente convergente su $t \in J$ in L^2-debole, che le ultime due successioni $(h'_{n_{p'}})$ e $(h''_{n_{p'}})$ sono estratte successivamente da (h_{n_p}) e che la successione $\{t_{p'}\}_1^\infty$ è la stessa, risulterà subito che è

$$\lim_{p' \to \infty}{}^* F(s, t + t_{p'} + h'_{n_{p'}}) = \lim_{p' \to \infty}{}^* F(s, t + t_{p'} + h''_{n_{p'}}) = G(s, t) \tag{4,4}$$

uniformemente su $t \in J$ in L^2-debole.

Considerando ora le successioni di soluzioni

$$\{U(s, t + t_{p'} + h'_{n_{p'}})\} \quad , \quad \{U(s, t + t_{p'} + h''_{n_{p'}})\} \tag{4,5}$$

risulterà dalla prop. II.2, dalla (4,2) e (4,4), che esistono per ogni $t \in J$, in L^2-debole, i limiti

$$\lim_{p' \to \infty} U(s, t + t_{p'} + h'_{n_{p'}}) = U_1(s, t) \quad , \quad \lim_{p' \to \infty} U(s, t + t_{p'} + h''_{n_{p'}}) = U_2(s, t), \tag{4,6}$$

le funzioni $U_1(s, t)$ e $U_2(s, t)$ così ottenute essendo soluzioni della (2,3) con termine noto $G(s, t)$.

D'altra parte, per costruzione, esse risultano limitate da $t \in J$ a $L^2(R^n)$, e quindi dalla prop. II.4 (unicità della soluzione limitata su $t \in J$), risulta

$$U_1(s, t) = U_2(s, t) \quad \text{in} \quad L^2(R^n) \quad \text{per} \quad t \in J . \tag{4,7}$$

Per $t = 0$, $U_1(s, 0) = U_2(s, 0)$ e quindi

$$\lim_{p' \to \infty} U(s, t_{p'} + h'_{n_{p'}}) = \lim_{p' \to \infty} U(s, t_{p'} + h''_{n_{p'}}) , \quad \text{in } L^2\text{-debole} \tag{4,8}$$

che è contraddittoria con la (3,6).

Dimostreremo ora l'estensione del teorema di Bohr-Neugebauer [5] per la quasi-periodicità forte. Si ha il seguente

TEOREMA IV.2. – *Sia* $F(s, t)$ *fortemente continua e quasi-periodica, da* $t \in J$ *a* $L^2(R^n)$. *Allora, ogni soluzione* $U(s, t)$ *della* (2,3), *che è definita e limitata su* $t \in J$ *risulta fortemente quasi-periodica.*

Dimostrazione [1]. – Consideriamo la funzione caratteristica

$$\chi_p(s) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad s \in E_p \\ 0, & \text{se} \quad s \notin E_p \end{cases} \tag{4,9}$$

ove, per $p = 1, 2, \cdots, E_p = \left\{ s, \frac{1}{p+1} \leq |s| < \frac{1}{p} \right\}$.

(1) Si usa il metodo delle proiezioni (vedasi per esempio J. L. LIONS, *Equations differéntielles operationnelles et problèmes aux limites*, Springer 1961, p. 212).

La funzione $U_p(s, t) = \chi_p(s) U(s, t)$ *è ancora, per ogni* p, *soluzione debole – limitata su* $t \in J$ *– della* (2,3), *ma con termine noto* $F_p(s, t) = \chi_p(s) F(s, t)$, *invece di* $F(s, t)$.

Infatti, è ovvio che $U_p(s, t)$ è definita e limitata da $t \in J$ a $L^2(R^n)$.

Poiché $U(s, t)$ è, in $L^2(R^n)$, debolmente derivabile con continuità, esiste la derivata

$$\frac{d}{dt}\int_{R^n} U(s, t)\,\chi_p(s)\,\Phi(s)\,ds \quad , \quad \Phi(s) \in \mathcal{S}. \tag{4,10}$$

Esistono pure gli integrali

$$\int_{R^n} U(s, t)(-s^2)\,\chi_p(s)\,\Phi(s)\,ds \quad , \quad \int_{R^n} F(s, t)\,\chi_p(s)\,\Phi(s)\,ds. \tag{4,11}$$

Prendiamo ora una successione $\Phi_n(s) \in \mathcal{S}$, tale che, in $\mathcal{S}$, e a fortiori in $L^2(R^n)$–forte, sia

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(s) = \chi_p(s)\,\Phi(s). \tag{4,12}$$

Risulta ovviamente che vale pure in $L^2(R^n)$, la relazione

$$\lim_{n\to\infty} -s^2\,\Phi_n(s) = \chi_p(s)\,\Phi(s)(-s^2).$$

Poiché, per ogni $n = 1, 2, \cdots$ si ha

$$\frac{d}{dt}\int_{R^n} U(s, t)\,\Phi_n(s)\,ds = \int_{R^n} U(s, t)(-s^2)\,\Phi_n(s)\,ds + \int_{R^n} F(s, t)\,\Phi_n(s)\,ds \tag{4,13}$$

si ottiene facilmente la nostra tesi passando al limite per $n \to \infty$.

Le stesse relazioni valgono per la funzione

$$\overline{U}(s, t) = \begin{cases} U(s, t) & , \quad 0 \leq |s| < 1 \\ 0 & , \quad |s| \geq 1 \end{cases}$$

che risulta pure soluzione debole limitata della (2,3), con termine noto

$$\overline{F}(s, t) = \begin{cases} F(s, t) & , \quad 0 \leq |s| \leq 1 \\ 0 & , \quad |s| \geq 1. \end{cases}$$

Sia ora la funzione $V_p(s, t)$, $p = 1, 2, \cdots$ definita da

$$V_p(s, t) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{t} e^{-s^2(t-u)}\,F_p(s, u)\,du, \quad \text{limite forte in } L^2(R^n) \tag{4,14}$$

(integrale di Bochner in $L^2(R^n)$.

Anzitutto, proviamo *l'esistenza di questo limite.*

Osserviamo che la funzione

$$G_p(s, u) = e^{-s^2(t-u)}\,F_p(s, u) \tag{4,15}$$

è fortemente continua per ogni u, $-\infty < u < t$, e inoltre vale la maggiorazione

$$(4,16) \qquad \| G_p(s, u) \|_{L^2} = \left\{ \int_{R^n} e^{-2s^2(t-u)} \mid F_p(s, u) \mid^2 ds \right\}^{1/2} =$$

$$\left\{ \int_{\frac{1}{p+1} \le |s| < \frac{1}{p}} e^{-2s^2(t-u)} \mid F_p(s, u) \mid^2 ds \right\}^{1/2} \le e^{-\frac{(t-u)}{(p+1)^2}} \left\{ \int_{R^n} \mid F_p(s, u) \mid^2 ds \right\}^{1/2}$$

$$\le \sup_{u \in J} \| F_p(s, u) \|_{L^2} \cdot e^{-\frac{(t-u)}{(p+1)^2}} .$$

Ma la funzione $e^{-\frac{(t-u)}{(p+1)^2}}$ è sommabile su $-\infty < u < t$; ne risulta che la funzione $G_p(s, u)$ è sommabile Bochner su $(-\infty, t)$ ed è inoltre

$$(4,17) \qquad \left\| \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2(t-u)} F_p(s, u)\, du \right\|_{L^2} \le (p+1)^2 \sup_{u \in J} \| F_p(s, u) \|_{L^2} =$$

$$F_p \cdot (p+1)^2, \quad t \in J .$$

Perciò la funzione $V_p(s, t)$ *risulta fortemente continua e limitata da* $t \in J$ a $L^2(R^n)$.

Dimostriamo ora la *quasi-periodicità forte della funzione* $V_p(s, t)$. Se $\varepsilon > 0$ è dato ad arbitrio, e se t_ε è un quasi-periodo di $F_p(s, t)$ – ovviamente q. p., poiché lo è $F(s, t)$ – corrispondente al numero $\frac{\varepsilon}{(p+1)^2 F_p}$, vale la relazione immediata

$$(4,18) \qquad V_p(s, t+t_\varepsilon) - V_p(s, t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2(t-u)} [F_p(s, u+t_\varepsilon) - F_p(s, u)]\, du .$$

Di qui, con maggiorazioni analoghe alle precedenti, si ricava

$$(4,19) \qquad \operatorname{Sup}_{t \in J} \| V_p(s, t+t_\varepsilon) - V_p(s, t) \|_{L^2} < \varepsilon .$$

Proviamo ora che *la funzione* $V_p(s, t)$ *è, per ogni* p, *fortemente derivabile in* $L^2(R^n)$, *per* $t \in J$, *e che vale la*

$$(4,20) \qquad \frac{d}{dt} V_p(s, t) = -s^2 V_p(s, t) + F_p(s, t) .$$

Si ha infatti, per $h > 0$, che

$$(4,21) \qquad \frac{1}{h} [V_p(s, t+h) - V_p(s, t)] = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{h} [e^{-s^2(t-u+h)} - e^{-s^2(t-u)}] F_p(s, u)\, du$$

$$+ \frac{1}{h} \int_{t}^{t+h} e^{-s^2(t-u+h)} F_p(s, u)\, du .$$

Il secondo integrale converge verso $F_p(s, t)$ in $L^2(R^n)$–forte, se $h \to 0$, poiché risulta

$$(4,22) \qquad \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [e^{-s^2(t-u+h)} F_p(s, u) - F_p(s, t)] \, du \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| e^{-s^2(t-u+h)} F_p(s, u)$$

$$- F_p(s, t) \|_{L^2} \, du \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| e^{-s^2(t-u+h)} [F_p(s, u) - F_p(s, t)] \|_{L^2} \, du$$

$$+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| [e^{-s^2(t-u+h)} - 1] F_p(s, t) \|_{L^2} \, du \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \| F_p(s, u) - F_p(s, t) \|_{L^2} \, du$$

$$+ \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left\{ \int_{E_p} | e^{-s^2(t-u+h)} - 1 |^2 \, | F_p(s, t) |^2 \, ds \right\}^{1/2} du .$$

Se $h \to 0$, questi ultimi due integrali convergono verso zero: il primo in virtù della continuità forte di $F_p(s, u)$, il secondo per il teorema di Lebesgue sul passaggio al limite sotto il segno d'integrazione.

Considerando ora il primo integrale di (4,21), proviamo che esso converge per $h \to 0$, in $L^2(R^n)$ forte, verso $-s^2 \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2(t-u)} F_p(s, u) \, du$. Si ha infatti

$$(4,23) \qquad \left\| \int_{-\infty}^{t} \left\{ \frac{1}{h} [e^{-s^2(t+h-u)} - e^{-s^2(t-u)}] + s^2 e^{-s^2(t-u)} \right\} F_p(s, u) \, du \right\|_{L^2} =$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\{ \int_{E_p} \left| \frac{1}{h} [e^{-s^2(t-u+h)} - e^{-s^2(t-u)}] + s^2 e^{-s^2(t-u)} \right|^2 | F_p(s, u) |^2 \, ds \right\}^{1/2} du =$$

$$\int_{-\infty}^{t} \left\{ \int_{E_p} | s^2 [e^{-s^2(t-u)} - e^{-s^2(t+\theta h-u)}] |^2 \, | F_p(s, u) |^2 \, ds \right\}^{1/2} du .$$

Si vede, *in virtù del teorema di Lebesgue*, che l'integrale rispetto alla variabile s converge verso zero per $h \to 0$. Anche l'integrale rispetto alla variabile u converge verso zero: vale infatti la diseguaglianza

$$(4,24) \qquad \left\{ \int_{E_p} | s^2 [e^{-s^2(t-u)} - e^{-s^2(t+\theta h-u)}] |^2 \, | F_p(s, u) |^2 \, ds \right\}^{1/2}$$

$$\leq \frac{1}{p^2} \left[e^{-\frac{(t-u)}{(p+1)^2}} + e^{-\frac{(t-u+\theta h)}{(p+1)^2}} \right] \| F_p(s, u) \|_{L^2} ,$$

ed essendo quest'ultima funzione sommabile rispetto a u nell'intervallo $-\infty \, u < t$ l'integrale (4,23) converge verso zero per $h \to 0$.

La (4,20) è così provata.

Ora, la funzione $-s^2 V_p(s, t)$ è quasi-periodica da $t \in J$ a $L^2(R^n)$, poiché risulta

$$(4,25) \qquad \left\| -s^2 V_p(s, t + t_\varepsilon) - (-s^2) V_p(s, t) \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{p^2} \left\| V_p(s, t + t_\varepsilon) - V_p(s, t) \right\|.$$

Poiché $F_p(s, t)$ è ovviamente quasi-periodica, dalla (4,20) risulta così la *quasi-periodicità della* $\dfrac{dV_p(s,t)}{dt}$, $p = 1, 2, \cdots$.

Essendo $U_p(s, t)$ e $V_p(s, t)$ soluzioni della (2,3), con lo stesso termine noto $F_p(s, t)$, e tutte due limitate da $t \in J$ a $L^2(R^n)$, si ricava, per l'unicità della soluzione limitata, $U_p(s, t) = V_p(s, t)$, $p = 1, 2, \cdots$.

Per la definizione di $\overline{U}(s, t)$ risulta che

$$(4,26) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} U_p(s, t) = \overline{U}(s, t), \quad \text{in } L^2(R^n) \text{ forte}, \qquad t \in J.$$

Vale, ovviamente, la relazione equivalente

$$(4,27) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \| U_p(s, t) \|^2 = \| \overline{U}(s, t) \|^2 \leq K, \qquad t \in J,$$

poiché la $U(s, t)$ è supposta limitata da $t \in J$ a $L^2(R^n)$ e ovviamente $\| \overline{U}(s, t) \| \leq \| U(s, t) \|$, $t \in J$.

Tutte le funzioni $U_p(s, t) = V_p(s, t)$ sono, come abbiamo provato, fortemente q. p., ma non è ancora dimostrata la quasi-periodicità della $\overline{U}(s, t)$, poiché non è detto che la convergenza in (4,26)-(4,27) sia *uniforme* in $t \in J$. Perciò noi dimostreremo la quasi-periodicità della $\overline{U}(s, t)$ per un'altra strada.

Sia
$$\overline{F}(s, t) = \begin{cases} F(s, t), & 0 \leq |s| < 1 \\ 0, & |s| \geq 1. \end{cases}$$

Essa è quasi-periodica poiché lo è $F(s, t)$, e quindi, la sua traiettoria è relativamente compatta. D'altra parte, si ha

$$(4,28) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} F_p(s, t) = \overline{F}(s, t), \quad \text{in } L^2(R^n) \text{ forte, per ogni } t \in J.$$

Ora l'operazione P_n di $L^2(R^n)$ in se stesso: $F(s) \to \sum_{p=1}^{n} F_p(s)$ è lineare e di norma ≤ 1, e si ha $\lim_{n \to \infty} P_n F = F$; risulta subito che questo limite vale *uniformemente* sugli insiemi relativamente compatti di $L^2(R^n)$: in particolare la traiettoria della $F(s, t)$. Si ha perciò la convergenza *uniforme* rispetto a $t \in J$ nella (4,28) [2].

D'altra parte anche la serie

$$(4,29) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} -s^2 U_p(s, t)$$

(2) Cfr. S. BOCHNER-J. VON NEUMANN, «Ann. Math.», pp. 255-290 (1935); L. AMERIO, «Rend. Acc. Lincei», Nota III, aprile 1960.

è convergente in $L^2(R^n)$–forte, *uniformemente* per $t \in J$. Si ha infatti

$$(4,30) \qquad \left\| \sum_{p=N}^{p=N+q} -s^2 U_p(s,t) \right\|_{L^2}^2 = \sum_N^{N+q} \left\| s^2 U_p(s,t) \right\|_{L^2}^2 = \sum_N^{N+q} \int_{R^n} s^4 U_p^2(s,t)\, ds =$$

$$\sum_N^{N+q} \int_{E_p} s^4 U_p^2(s,t)\, ds \leq \sum_N^{N+q} \frac{1}{p^4} \int_{E_p} U_p^2(s,t)\, ds \leq \frac{1}{N^4} \sum_N^{N+q} \| U_p(s,t) \|_{L^2}^2 \leq \frac{K}{N^4} < \varepsilon$$

se $N = N(\varepsilon)$ è abbastanza grande, ove $K = \operatorname{Sup}_{t \in J} \| U(s,t) \|_{L^2}^2$.

Dalla (4,20), poiché è $U_p(s,t) = V_p(s,t)$, risulta la convergenza *uniforme* su $t \in J$ in $L^2(R^n)$ forte, della serie

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{d U_p(s,t)}{dt} .$$

Si ha quindi che la serie $\sum_{p=1}^{\infty} U_p(s,t) = \bar{U}(s,t)$ converge fortemente per ogni $t \in J$ e la serie delle derivate, $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{dU_p(s,t)}{dt}$ è convergente *uniformemente* per $t \in J$ in $L^2(R^n)$ forte. Queste derivate essendo funzioni continue, con ragionamenti consueti, si dimostra che la funzione $\bar{U}(s,t)$ è fortemente derivabile, con la derivata continua uguale a

$$\frac{d\bar{U}(s,t)}{dt} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{dU_p(s,t)}{dt} .$$

Poiché le derivate $\frac{dU_p(s,t)}{dt}$ sono quasi–periodiche, risulta di qui la quasi–periodicità (forte) della funzione $\frac{d\bar{U}(s,t)}{dt}$ che è la loro somma *uniforme*.

Perciò $\bar{U}(s,t)$ è una funzione limitata da $t \in J$ a $L^2(R^n)$, con la derivata forte continua e quasi–periodica. Un teorema di Amerio [3] ci dà allora la quasi–periodicità della $U(s,t)$.

Prendiamo ora in considerazione la funzione

$$(4,32) \qquad \overset{\approx}{U}(s,t) = U(s,t) - \bar{U}(s,t) = \begin{cases} U(s,t), & \text{per } |s| \geq 1 \\ 0, & \text{per } 0 \leq |s| < 1 . \end{cases}$$

Dobbiamo provare che la $\overset{\approx}{U}(s,t)$ è anch'essa fortemente quasi–periodica. Sia adesso

$$(4,33) \qquad \overset{\approx}{\varkappa}_p(s) = \begin{cases} 1, & \text{se } s \in \mathcal{E}_p \\ 0, & \text{se } s \notin \mathcal{E}_p \end{cases} \qquad (p = 1, 2, \cdots, \mathcal{E}_p = \{ s, p \leq |s| < p+1 \}).$$

Come in (4,10)–(4,14), si vede che le funzioni $U_p(s,t) = \overset{\approx}{\varkappa}_p(s) \cdot U(s,t)$ sono soluzioni deboli limitate della (2,3), con termine noto $\overset{\approx}{F}_p(s,t) = \overset{\approx}{\varkappa}_p(s)\, F(s,t)$ Consideriamo ora le funzioni

$$\overset{\approx}{V}(s,t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-s^2(t-u)}\, \overset{\approx}{F}_p(s,u)\, du .$$

Analogamente a quanto si è visto in (4,14)–(4,16), risulta l'esistenza di tali integrali. Si ha poi la maggiorazione

$$(4,35) \qquad \| \tilde{V}_p(s,t) \|_{L^2} \leq \frac{1}{p^2} \sup_{t \in J} \| \tilde{F}_p(s,t) \| \leq \frac{1}{p^2} \cdot \sup_{t \in J} \| F(s,t) \|_{L^2}$$

e, come in (4,18) si dimostra che $\tilde{V}_p(s,t)$ è quasi–periodica. La funzione $\tilde{V}_p(s,t)$ è fortemente derivabile e vale la

$$(4,36) \qquad \frac{d\tilde{V}_p(s,t)}{dt} = -s^2 \tilde{V}_p(s,t) + \tilde{F}_p(s,t),$$

la dimostrazione data in (4,20)–(4,24) essendo tuttora valida.

Vale quindi la relazione $\tilde{U}_p(s,t) = \tilde{V}_p(s,t)$. Si ha poi, ovviamente,

$$(4,37) \qquad \tilde{U}(s,t) = \sum_1^\infty \tilde{U}_p(s,t) = \sum_1^\infty \tilde{V}_p(s,t) \qquad (\text{in } L^2(R^n)\text{–forte}).$$

e d lla (4,35) si ricava la convergenza *uniforme* su $t \in J$ della serie (4,37). Poiché le $\tilde{U}_p(s,t)$ sono q. p., risulta la quasi–periodicità della $\tilde{U}(s,t)$, e il nostro teorema è così provato.