La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Michele Pellerey

Bruno de Finetti e i programmi d'insegnamento della matematica nella scuola secondaria

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2015), n.3 (*Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica. «Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà», a cura di Giuseppe Anichini, Livia Giacardi, Erika Luciano)*, p. 43–72.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_3_43_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2015.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 43-72

Bruno de Finetti e i programmi d'insegnamento della matematica nella scuola secondaria

MICHELE PELLEREY

Il primo problema non è tanto quello di far apprendere la matematica, ma di farla comprendere come qualcosa di vivo nel regno del pensiero, che vi risponde a bisogni insostituibili della mente e cui si fondono i motivi pratici che ne danno occasione e l'elaborazione scientifica e concettuale che ne ricava costruzioni di limpida eleganza e bellezza quasi sovrumana. E farla comprendere significa anzitutto farla amare, farla sentire non avulsa dai pensieri e meditazioni e preoccupazioni d'ogni giorno, ma ad essi siffattamente frammista da far apparire all'opposto arido e opaco il pensiero che non sappia attingere alla sua luce.

(Bruno de Finetti, Trieste, 24 novembre 1943) ([1])

1. – Introduzione

Il mio contributo intende esplorare quale epistemologia della matematica, considerata nel contesto dell'educazione scolastica, caratterizzasse il pensiero di de Finetti nell'esaminare e proporre i vari contenuti propri dei programmi della scuola secondaria.

A mio avviso la sua impostazione epistemologica si era sviluppata durante il duro lavoro di costruzione della sua opera didattica fondamentale, *Matematica logico intuitiva*, elaborata per gli studenti universitari negli anni Quaranta ([2]). In questa prospettiva è di grande in-

([1]) De Finetti B., *Prefazione* alla prima edizione di de Finetti L (1944), 1959, p. X. Si veda nel presente volume la sezione "La parola a Bruno de Finetti".

([2]) Ne ha data una testimonianza la figlia nel suo contributo del 2010: Fulvia de Finetti, L'insegnamento della matematica secondo de Finetti, *Periodico di matematiche*, 3, 2010, p. 12.

teresse evidenziare anche la sua particolare attenzione ai processi di costruzione delle conoscenze matematiche nella prospettiva psicologica.

Da quest'ultimo punto di vista, vorrei subito dedicare qualche riga a quanto egli mi ha insegnato per il mio lavoro di studioso dei processi di apprendimento, soprattutto non matematici. L'idea che si parta sempre dalle opinioni (o dalle intuizioni, o dai giudizi) che abbiamo nel merito della possibilità del verificarsi d'un evento futuro, mi ha portato a estendere tale assunto alla considerazione più generale della plausibilità delle nostre affermazioni o conclusioni. Ricordo un incontro tra de Finetti e George Pólya avvenuto poco dopo l'assunzione da parte di de Finetti della Presidenza della Mathesis nel 1971. Pólya era a Roma per presentare le sue idee in merito all'euristica presso la Mathesis ([3]). Discutendo dei loro approcci, il primo sulla dinamica del pensiero nel caso della probabilità, il secondo sul processo in base al quale si viene a elaborare un giudizio di plausibilità nei riguardi di specifiche conclusioni, essi si trovarono d'accordo sul ruolo nelle loro riflessioni di due punti di appoggio: la qualità delle informazioni che derivano dall'esperienza e il ragionamento che su di esse si può sviluppare (certo non un ragionamento di natura logico-formalista). Nel caso della probabilità, secondo de Finetti era importante che l'opinione presente circa il grado di fiducia, che si poteva avere riguardo al verificarsi di un evento futuro, potesse rinforzarsi, o depotenziarsi, sulla base di un corretto uso delle informazioni rilevanti pro o contro tale assunto. Pólya ricordava come il grado di fiducia da dare alle affermazioni, anche di carattere scientifico, oltre che a quelle normali quotidiane, derivasse da un soppesare le prove favorevoli o contrarie a tale conclusione. Se le evidenze a favore fossero state per peso e numerosità maggiori di quelle contrarie e convergenti verso la stessa conclusione, la plausibilità dell'affermazione sarebbe aumentata di conseguenza. Era evidente l'analogia tra le due affermazioni. Alla loro base stava l'apertura verso il miglioramento delle proprie opinioni, dei propri giudizi: un atteggiamento decisamente antidogmatico. Credo che molte delle battaglie che

([3]) Una sintesi della conferenza di Pólya dal titolo *Deviner et démontrer* è stata pubblicata da de Finetti sul Periodico di matematiche nel 1972 (de Finetti A 1972d).

de Finetti ha ingaggiato trovavano qui la loro radice e il perché egli parlasse di "imbecillità" ([4]) dei comportamenti chiusi, magari formalmente corretti, ma insensati, incapaci di rivedere le proprie assunzioni e i propri pregiudizi, e proprio per questo rigidi e inflessibili.

Ebbene lo sviluppo della psicologia dell'apprendimento concettuale ha messo in luce come il formarsi dei concetti e dei giudizi, sia basato su un lungo percorso, che parte da intuizioni molte volte confuse, a volte anche distorte, ma che progressivamente vanno chiarendosi e precisandosi sulla base della considerazione di nuovi casi a favore o contro l'iniziale assunzione e grazie alla riflessione critica innestata da tali nuovi apporti. In questo percorso la parola ha un suo ruolo puntuale come riferimento. Un esempio può essere quello del formarsi del concetto di rapporto. Ben presto si hanno intuizioni sotterranee, che spesso non sono linguisticamente espresse in modo chiaro, ma l'accumularsi dell'esperienza può portare alla fine a una riflessione critica, che ne permette una definizione sufficientemente chiara. Lucio Lombardo Radice, riprendendo un'espressione cara a de Finetti, parlava di concetti astratti come multi-concreti ([5]), nel senso che emergono dal confronto tra casi diversi ed esperienze molteplici, tramite la ricerca di analogie e differenze, onde far emergere con più chiarezza e precisione il nucleo concettuale essenziale e la relativa espressione linguistica. Così a poco a poco la frazione, la percentuale, il numero decimale, appaiono modalità di rappresentazione simbolica dello stesso nucleo concettuale, quello di rapporto.

Rileggendo le prese di posizione di Bruno de Finetti, spesso si ritrova proprio questa impostazione come elemento centrale nel suo pensiero, fin dai suoi primi interventi. Nel 1954 scriveva su Archimede:

> *vera istruttiva astrazione è soltanto quella che parte da molte nozioni concrete e mostra il concetto comune che se ne può trarre come astrazione.* [...]. *Astrazione significa sintesi da molte cose che hanno alcunché in comune,*

([4]) Era diventata comune questa definizione, dopo la pubblicazione di de Finetti A 1965b.

([5]) Per esempio si può citare: G. Catalano, L. Lombardo Radice, *Minialgebra*, Milano: Feltrinelli, 1967, p. 23.

> *non vaniloquio creato su nulla e per nulla. È questo in certo senso il punto capitale, perché «capire la matematica», a mio avviso, non significa tanto essere in grado di eseguire certi calcoli o certi ragionamenti, quanto il saper associare nel subcosciente ad ogni vuota formula o teorema la più ricca moltitudine delle sue concrete possibili interpretazioni e applicazioni.* (de Finetti A 1954a, p. 207)

Mi è parso essenziale richiamare subito questo elemento di riferimento, per chiarire il perché di certe posizioni che a molti erano sembrate un po' estremistiche, come la sua insistenza sul fusionismo definito, anche dai suoi amici, 'confusionismo' (de Finetti A 1978a, pp. 10-11). In realtà, de Finetti riteneva che la potenza di un concetto fondamentale non potesse essere racchiusa in un'interpretazione riduttiva o in un'espressione formale astratta, spesso impedendo con ciò la possibilità di una sua valorizzazione esplicativa più generale. Non solo, ma credeva che dietro ogni concettualizzazione esistesse una storia, molto spesso soggettiva, d'incontro con l'esperienza, con la realtà. E la stessa cosa valeva per ogni giudizio di probabilità, così come di plausibilità: occorreva considerarlo nel suo sviluppo e nella sua provvisorietà. Ogni concetto o giudizio era sempre possibile rivederlo, precisarlo, allargarlo ad altri casi.

2. – La partecipazione di Bruno de Finetti al movimento di rinnovamento dell'insegnamento della matematica degli anni Sessanta

Per capire le questioni poste nel corso degli anni Sessanta del secolo scorso dalla definizione dei programmi di matematica sia per la secondaria inferiore o di primo grado, sia per la secondaria superiore, e le posizioni assunte da Bruno de Finetti in tale occasione, sembra utile richiamare a grandi linee qual era il dibattito in corso, in particolare in ambito europeo. Dagli anni dell'immediato dopoguerra si discuteva della necessità di un rinnovamento profondo dell'insegnamento della matematica. In seguito al cosiddetto *Sputnik shock* del 1957 si era accentuata tale discussione sia negli Stati Uniti d'America, sia in Europa. In particolare nel 1959 si era tenuto a Royaumont (23 novembre - 4 dicembre) in Francia un seminario organizzato dall'OEEC (*Organisation for European Economic Cooperation*), ora diventato OCSE, dedicato proprio a tale argomento ([6]). Per l'Italia parteciparono Luigi Campedelli e Emma Castelnuovo. In tale occasione si rimise in discussione l'insegnamento della geometria sulla base degli *Elementi* di Euclide per insistere su un approccio basato sull'algebra lineare e sugli spazi vettoriali, considerati in un contesto affine e non metrico. Fu in quell'occasione che Jean Dieudonné lanciò la sfida: "À bas Euclide".

Come vedremo, de Finetti fu del tutto favorevole a questa svolta. Mi sono sempre domandato come mai, a parte le considerazioni legate alle possibili applicazioni economiche. Ho trovato una risposta, constatando che la tesi di laurea conseguita presso l'Università di Milano nel 1927 sotto la guida di Giulio Vivanti, verteva proprio su un tema di analisi vettoriale in ambito affine.

Una delle conclusioni fondamentali del seminario di Royaumont sancì "la necessità di modernizzare l'insegnamento della matematica. Per realizzare questo proposito, era indispensabile che ogni Paese redigesse nuovi libri di testo e nuovi manuali" ([7]). Al fine di realizzare un coordinamento europeo in tale impresa venne costituito un gruppo di studio e realizzato un altro seminario a Dubrovnik dal 21 agosto al 19 settembre del 1960. In tale occasione ci si dedicò ai programmi per la scuola secondaria, ma anche si insistette sulla centralità in tale prospettiva della teoria degli insiemi:

> *La nozione di oggetti o elementi in quanto distinta dalla nozione di insiemi composti di oggetti, proprietà degli insiemi; relazioni fra gli oggetti di differenti insiemi o fra gli insiemi stessi, relazioni tra oggetti e insiemi* [...] [tutto ciò] *rende più chiare numerose nozioni matematiche, talvolta mal comprese, e può essere usato per formulare teorie matematiche* [...]. *Sin da*

([6]) Per una sintesi sia del seminario di Royaumont e dei suoi risultati, sia di quello di Dubrovnik si può consultare Pellerey, 1989, pp. 47-52. Gli atti del seminario di Royaumont furono pubblicati nel 1961 (OEEC, 1961) e quelli di Dubrovnik nel 1962 (OEEC, 1962). Di questi ultimi si ha una traduzione italiana della prima parte dedicata alla scuola secondaria di primo grado (OCSE, 1963).

([7]) Le conclusioni del seminario di Royaumont sono contenute nel quinto capitolo di OEEC, 1961. Nell'Introduzione di OCSE, 1963, si riportano tali conclusioni presentando i lavori del seminario di Dubrovnik, pp. 9-13.

quando comincia a insegnare la matematica, il professore dovrebbe aver cura che gli alunni acquisiscano [...] *una comprensione della nozione di insieme.* (OCSE 1963, pp. 22-23)

Con la legge 1859 del 31 dicembre 1962 in Italia fu approvata la cosiddetta scuola media unica per tutti, a completamento dell'obbligo scolare previsto dalla Costituzione. Nell'aprile del 1963 (D.M. 24 aprile 1963) furono decretati i nuovi programmi di matematica e si aprì contemporaneamente la questione dell'abbinamento dell'insegnamento di matematica e di osservazioni ed elementi di scienze naturali. Ne derivava anche la problematica connessa con la formazione e il reclutamento degli insegnanti ([8]).

Nel 1964 si svolsero a Frascati due convegni. Il primo nel mese di marzo dal 19 al 21 fu dedicato alla nuova scuola media e alla formazione dei docenti. Il secondo, tenutosi dall'8 al 10 ottobre, dedicato ai programmi della scuola secondaria superiore, ebbe carattere internazionale. Il tema era: "La matematica all'ingresso dell'università: situazione reale e situazione desiderabile". Al Convegno parteciparono noti studiosi europei come André Lichnerowicz, presidente del convegno, Georges Papy e André Revuz, che tennero relazioni generali, e italiani (tra cui Luigi Campedelli, Carlo Felice Manara, Angelo Pescarini). De Finetti tenne una relazione, riassunta nel 1965 sul *Periodico di Matematiche* (de Finetti A 1965a), aggiungendo commenti vari e i risultati dei suoi colloqui con i partecipanti. L'argomento da lui sviluppato era "In che senso e fino a qual punto è utile una differenziazione di programmi a seconda dei tipi di scuola e dei futuri studi degli allievi?".

Come conseguenza della riforma della scuola media, sembrava necessario procedere a una riforma della scuola secondaria superiore, in

([8]) Una ricostruzione a varie voci del dibattito relativo sia all'abbinamento tra l'insegnamento della matematica e quello delle osservazioni scientifiche, sia alla relativa formazione dei docenti e costituzione di un nuovo corso di laurea, si può trovare sul sito dell'Università Bocconi di Milano: www.matematica.unibocconi.it/pubblicazioni/pristemstoria-32-33-aprile-2013 (consultato il 20 febbraio 2015, verificato il 7 dicembre 2015). Il lettore interessato può trovare nei lavori raccolti in tale sito molti riferimenti, che consentono un adeguato approfondimento delle varie questioni coinvolte.

particolare dei licei. Nel caso dell'insegnamento della matematica si riteneva urgente redigere nuovi programmi. A questo fine, a cura della CIIM (Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica) furono tenuti due incontri dal 23 al 26 febbraio 1966 e dal 16 al 18 febbraio 1967, rispettivamente sul primo biennio della scuola secondaria superiore e sul triennio liceale. A tali incontri partecipò attivamente anche Bruno de Finetti, oltre a numerosi docenti universitari e secondari di matematica e membri della Pubblica Amministrazione. I programmi elaborati in tali incontri furono nel seguito denominati: "I programmi di Frascati". Nell'immediato rimasero tuttavia in attesa di tempi migliori. De Finetti dedicò un lungo commento a tali programmi su il *Periodico di Matematiche* dell'aprile del 1967 (de Finetti A 1967a). Nel 1974, in un articolo intitolato "... ATTENDENDO GODOT", rilevò come il progetto della commissione Biasini ([9]), che delineava una unificazione sostanziale di tutta la fascia secondaria, era già una "versione piuttosto annacquata" delle proposte di Frascati; ma ora si era verificato un "pauroso passo indietro riguardo alla riforma dell'insegnamento secondario superiore" (de Finetti A 1974e, p. 4).

Nel seguito prenderò lo spunto dagli interventi di de Finetti pubblicati in quel periodo per chiarire alcuni dei suoi orientamenti in merito all'impostazione di tali programmi e più in generale all'insegnamento della matematica, evidenziandone, come precedentemente detto, la prospettiva epistemologica e psicologica.

3. – L'abbinamento dell'insegnamento di matematica e osservazioni scientifiche, derivante dalla riforma della scuola media del 1962

Come accennato, la riforma della scuola media prevista dalla legge 1859 del 31 dicembre 1962 poneva alla matematica due sfide fondamentali: l'istituzione dell'insegnamento congiunto di matematica e

([9]) La Commissione Oddo Biasini, allora sottosegretario alla P.I., composta da 57 membri, rappresentanti delle diverse correnti sindacali e politiche, era stata nominata dal Ministro Misasi nel 1970 al fine di delineare una riforma della secondaria superiore. Il testo del Documento conclusivo si può consultare in *Annali della Pubblica Istruzione*, (novembre-dicembre) 1971, pp. 607-632.

osservazioni ed elementi di scienze naturali e la definizione dei programmi di matematica per i tre anni previsti. Sulla prima sfida de Finetti, contrariamente a molti matematici e alla stessa Emma Castelnuovo (10), era decisamente favorevole. Anche se, dato lo stato di preparazione degli insegnanti allora disponibili, sul piano attuativo occorreva andare cauti. La soluzione, che egli caldeggiava, era quella di costituire un nuovo canale formativo universitario diretto specificatamente a preparare i docenti nell'insegnamento congiunto di matematica e osservazioni scientifiche (11). In occasione del Colloquio di Frascati del 19-21 marzo 1964 sui problemi dell'insegnamento matematico, Roberto Giannarelli commentava su *Archimede*:

> *In sintesi, si può affermare che i pedagogisti e l'amministrazione sono favorevoli all'abbinamento e assai favorevoli anche i naturalisti. I matematici sono in maggioranza contrari, ma anche fra essi si trovano sostenitori dell'abbinamento soprattutto per il maggior peso che danno alle ragioni sociali e a quelle più attinenti alle necessità organizzative.* (Giannarelli 1964, p. 40)

L'essere tra i pochi matematici favorevoli non disturbava più di tanto de Finetti. In effetti, egli aveva sostenuto tale impostazione con decisione:

> *L'aspetto forse più controverso, nella formazione universitaria dei docenti, sarà quello relativo alle conoscenze in altri campi della scienza, non strettamente matematici. A mio avviso un professore di matematica dovrebbe risultare tanto più aperto e interessato a tutto il campo della scienza quanto più giovani sono gli studenti cui deve insegnare. Infatti l'insegnamento della matematica appare ostico ed arido alla maggior parte dei giovani (e purtroppo tale rimane nel loro ricordo e nel giudizio quando divengono adulti) proprio perché non si cerca, ma anzi si evita, di far comprendere il senso della matematica come strumento che «fa presa sulle cose», anziché come insulso sproloquio per costruire perfetti arzigogoli nel vuoto. Quale*

(10) Posso testimoniare tale contrarietà, avendola sentita più volte dalla sua viva voce. Inoltre, Emma non accettò mai di insegnare anche osservazioni scientifiche.

(11) Già nel 1963 presso la Facoltà di Scienze dell'Università di Roma era stata nominata una commissione di studio in proposito e i suoi risultati erano stati approvati in linea di massima dalla stessa facoltà (de Finetti A 1964a, 73).

migliore rimedio che far constatare ai ragazzi che qualunque discorso incidentalmente avviato col professore di matematica (sulla fisica o l'economia, la biologia o la statistica, e via dicendo) avrà un tono di consistenza e di penetrazione diverso (anche senza un grado di conoscenza troppo esteso in ogni specifico campo) che riveli l'apporto della visione matematica? (de Finetti A 1964c, p. 35)

E già nel 1964 de Finetti vagheggiava quanto poi tentò di realizzare a cavallo del nuovo decennio:

Guardando invece verso il futuro, ritengo che sia preferibile e raccomandabile la preparazione di insegnanti specificatamente indirizzati verso tale insegnamento abbinato, rispondente sia alle esigenze di introduzione ed esemplificazione di concetti e strutture matematiche attraverso diretta derivazione dal concreto, sia alle esigenze dell'osservazione scientifica che attraverso misure, diagrammi, schemi di ragionamento ecc., avvia alla «visione» scientifica imperniata su concetti matematici. (*Ibidem*, p. 36)

L'occasione per progettare un simile corso di laurea venne alla fine degli anni Sessanta. Nel 1969 egli scrisse su *La Riforma della Scuola*:

Una possibilità di creare persone qualificate in tal senso dovrebbe presentarsi ora, con l'istituzione di corsi di laurea abilitanti all'insegnamento della Matematica e osservazioni scientifiche nella scuola media (istituzione contemplata nella legge istitutiva dell'Università della Calabria e valida per tutte le altre sedi). (de Finetti A 1969, p. 17) ([12])

Avendo collaborato con de Finetti in tale impresa, sono testimone diretto del notevole impegno speso da lui nel progettare e cercare di attivare tale corso di laurea presso l'Università di Roma, l'attuale Sapienza. Vennero anche identificate alcune scuole medie pilota, presso le quali svolgere le attività di tirocinio pratico, e il Senato accademico dell'Università giunse ad approvare tale progetto. Ma si

([12]) L'Università di Calabria citata da de Finetti era stata autorizzata con legge n. 442 del 12 marzo 1968 ad istituire presso la Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali un diploma di laurea al quale era attribuito valore abilitante all'insegnamento nella scuola media per la cattedra di Matematica e Osservazioni ed Elementi di Scienze Naturali.

misero di traverso questioni molto concrete: quale collocazione avrebbero avuto gli insegnanti abilitati da tale corso di laurea nei riguardi delle graduatorie costituite da docenti precari, già allora fonte di forti tensioni e polemiche? E non se ne fece più nulla.

La seconda sfida riguardava i programmi d'insegnamento, non solo per la neonata scuola media unica, ma anche per la futura scuola secondaria superiore, quando essa avrebbe dovuto accogliere i giovani diplomati da tale nuovo segmento scolastico obbligatorio per tutti. Quanto ai programmi per la nuova scuola media essi erano stati pubblicati nell'aprile del 1963 (D.M. 24 aprile 1963). Quelli di matematica erano considerati da de Finetti accettabili, anche se egli si poneva seriamente la questione metodologica: come procedere didatticamente per promuovere quanto previsto per ciascuna delle tre classi. Questa era anche la ragione dell'interesse da lui dimostrato in relazione alla preparazione degli insegnanti come osservava Giannarelli:

> *Emanati da pochi mesi i programmi di insegnamento delle diverse discipline nella Scuola Media, non è certo il caso di proporne immediate modifiche anche perché detti programmi sono stati ispirati a modernità.* Tuttavia non si è agito *secondo l'opinione di un certo gruppo di studiosi, in maniera sufficientemente decisa, essendosi le innovazioni limitate a dare un'impronta aggiornata alle «premesse» dei programmi più che ai programmi stessi.* (Giannarelli 1964, p. 41)

4. – Alla radice delle ragioni di de Finetti nel sostenere l'abbinamento tra insegnamento della matematica e scienze: il fusionismo

Spesso nei suoi interventi orali e scritti de Finetti insisteva su una visione complessiva del sapere umano. Partendo dal concetto di fusionismo elaborato da Felix Klein ([13]) egli estese tale prospettiva a una visione integrata non solo delle matematiche, che in questo modo diventavano "la matematica", ma anche di tutte le scienze sia matema-

([13]) De Finetti mi confidò che aveva approfondito le sue idee in merito all'insegnamento della matematica a partire dalla lettura dell'originale tedesco della celebre opera in tre volumi di Felix Klein, pubblicata tra il 1908 e il 1909 a Leipzig, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*.

tiche, sia fisiche, sia chimiche, sia naturali. Spesso collocava tutto ciò nel quadro complessivo della cultura umana. Mi sono chiesto il perché di questa insistenza. La spiegazione che mi sono data è questa. La sua attenzione al soggetto discente lo portava a considerare la necessità di valorizzare tutta la sua esperienza precedente e, su questa base, cercare di fondare il suo patrimonio culturale, aiutandolo a elaborare le fondamentali categorie d'interpretazione della realtà e di strutturazione del pensiero. Il patrimonio conoscitivo, poi, che ne deve risultare, non può essere sviluppato in compartimenti stagni per non perderne la significatività e l'applicabilità alla risoluzione dei vari problemi che si possono incontrare, dentro e fuori dalla matematica.

Già nel 1954, tenendo a Trieste una conferenza presso l'Associazione Laureati dell'Università locale, de Finetti affermava:

> *Il difetto di collegamento fra diversi capitoli della matematica è la causa prima dello scarso profitto degli studi. Cose facili, che, introdotte con chiarezza una volta sola, permetterebbero di dominare senza fatica vasti orizzonti* [...], *sembra vengano presentate appositamente in modo mutilato e offuscato per obbligare ogni volta a cominciare da capo e creare disorientamento. Molti argomenti risulterebbero facili e interessanti mostrandone subito la rappresentazione geometrica,* ... [ma se si arriva tardi], *diventa una fatica in più apprenderla, ed è troppo tardi perché il danno della separazione dei due aspetti formale e sostanziale, possa annullarsi in una semplice sintesi. La tendenza a ovviarvi ha avuto un nome, fusionismo, ed è autorevolmente presentata nientemeno che da Felix Klein.* (de Finetti A 1954a, pp. 209-210)

Spesso nei successivi interventi de Finetti ha ripreso tale tematica. Ben 24 anni dopo, in un testo del 1978, che rappresenta una sintesi matura del suo pensiero in merito all'insegnamento della matematica, egli lo ha ripreso in maniera puntuale. Egli citava, a tale proposito, il cosiddetto "Piano B" di Felix Klein:

> *contenuto in una sua celebre opera (1908) sulla Matematica elementare da un punto di vista superiore (tre volumi). Egli contrappone tale «Piano B» al «Piano A», che è quello scolastico tradizionale, irto di formalismo e povero di fantasia, del quale ancor oggi dobbiamo deplorare la sopravvivenza come faceva Klein fin dall'inizio del secolo. Egli afferma (Vol. I, Parte 1a, IV, 5) che «ogni movimento verso la riforma dell'insegnamento della matematica (nelle*

scuole secondarie) deve porre enfasi» ... sul «metodo genetico d'insegnamento» ..., sulla «fusione della percezione dello spazio e della percezione del numero», sulla «preminenza alla nozione di funzione». (de Finetti A 1978a, p. 9)
Per fusionismo – egli scrive – *si intende principalmente* [...] *la completa fusione degli argomenti geometrici e di quelli analitici (aritmetici, algebrici, ecc.), tradizionalmente tenuti separati, spesso addirittura con bigottismo puristico quasi per timore che al contatto si contaminassero a vicenda.* [...]. *È chiaro che apprendere simultaneamente un argomento analitico ed uno geometrico, visti come due aspetti di un unico argomento, significa ridurre la fatica a metà e ottenere una conoscenza doppiamente efficace per il chiarimento che ogni aspetto apporta alla comprensione dell'altro* [...]. *Meglio ancora se, procedendo ulteriormente nella stessa direzione, intenderemo, come intendiamo intendere, il fusionismo in una accezione del tutto generale, come visione unificata di tutte le interpretazioni e applicazioni di uguali od analoghi schemi o procedimenti.* (*Ibidem,* pp. 10-11)

Alle obbiezioni che mettevano in luce una sorta di "confusionismo" e di disordine nel procedere, egli ribatteva:

Possiamo ora spiegare meglio come e perché la trattazione dovrà risultare (apparentemente) disordinata. Volendo seguire un criterio più ambizioso collegato al fusionismo, dovremmo far procedere di pari passo (o almeno portandole a riaffiancarsi dopo ogni momentaneo sfasamento) le trattazioni degli aspetti aritmetico-analitici e di quelli geometrici, ed anche tutti gli argomenti applicativi che converrà inserire. E ciò converrà, in genere, sia per persuadere sempre meglio della validità e flessibilità dei metodi analitici e delle raffigurazioni geometriche e della loro fusione per imparare a vedere e risolvere problemi di non importa quale campo. (*Ibidem*, p. 11)

Nel commento ai "programmi di Frascati" del 1967 egli affrontava anche la questione

del grado di connessione da stabilire (o almeno da cercar di stabilire) tra l'insegnamento di diversi capitoli o parti della matematica e tra quello della Matematica e delle altre scienze (in particolare la Fisica). (de Finetti A 1967a, p. 82)

Egli richiamava a questo proposito il fusionismo di Klein e aggiungeva:

il problema sembra ora estremamente attuale perché il misoneismo che ha impedito finora una ragionevole evoluzione nel senso del fusionismo rischia *ora di farne accettare acriticamente una versione completamente formalizzata e astrattizzata (nel senso deteriore del termine, cioè «svuotata di ogni valore significativo», «privata di ogni nesso con visioni intuitive che consentano di vedere sinteticamente i risultati e il loro senso anziché affidarsi bruscamente a pedestri passaggetti su formulette e formulacce»).* (*Ibidem*)

In questo passaggio egli sembra accennare a una versione dell'impostazione algebrica della geometria. Ne riparliamo subito.

5. – I programmi della scuola secondaria superiore e il ruolo degli spazi vettoriali in ambiente affine

Come premessa a una ricostruzione del suo intervento al Convegno di Frascati dell'ottobre 1964, de Finetti scriveva:

In succinto, la tesi è questa: se c'è, come purtroppo indubbiamente c'è, un atteggiamento d'incomprensione e d'ostilità quasi generale dei profani contro la matematica, la colpa è nostra, dei matematici, perché non vogliamo e non cerchiamo o non sappiamo presentare la matematica in modo rispondente alle esigenze del profano. [Occorre affermare invece] *la posizione della matematica nel tutto che è la scienza e quella della scienza nel più grande tutto unitario che dovrebb'essere la cultura.* [...]. *Principalmente responsabile di tale lacerazione è la malintesa aspirazione al purismo, all'autonomia, alla specializzazione, all'isolamento.* (de Finetti A 1965a, p. 120)

Quanto alla specializzazione dei programmi della scuola pre-universitaria, egli assumeva questa posizione:

programma sostanzialmente unico, salvo differenziazioni marginali. Oltre che per il programma, la stessa risposta va data anche per riguardo ai criteri e metodi d'insegnamento, e forse anzi in modo ancora più reciso.

E precisava che:

occorre mostrare la matematica come strumento per approfondire e dominare lo studio [...] *dei problemi concreti di ogni genere, nel modo più utile e concreto specie grazie alla creazione di appropriati concetti astratti* [...] *sintesi dell'aspetto comune che riesce utile isolare per ridurre a unità e semplicità di visione fatti apparentemente disparati.* (*Ibidem*, p. 122)

Questa posizione, secondo de Finetti, venne sostanzialmente assunta poi dai "programmi di Frascati" in quanto rispetto a una forte differenziazione tra i diversi indirizzi dei licei:

> *Prevalse* [...] *largamente la tendenza opposta, intesa, nell'interesse della cultura nel suo insieme, a superare la deprecata scissione e incomprensione, e, nell'interesse particolare della comprensione per la matematica, a preoccuparsi anzitutto che essa divenisse patrimonio intellettuale e fecondo per tutti. Il programma poteva e doveva essere unico come elencazione di argomenti* [...] *la differenziazione potrà riguardare il modo, più o meno "tecnico" e dettagliato, di studiare i medesimi argomenti.* (de Finetti A 1967a, p. 77)

Partendo da queste premesse egli appoggiò l'orientamento allora assai diffuso in Francia e in Belgio ([14]), restio a fondare l'insegnamento della matematica su Euclide e la geometria metrica.

> *Il ruolo principale* – egli scrive – *per una radicale semplificazione e revisione dello strumentario matematico e della visione, resa unitaria, di quasi tutti gli argomenti, spetta senza dubbio alla nozione di sistema (o spazio) lineare (affine) da introdursi immediatamente ed esclusivamente in ogni occasione.* [...]. *Il tutto, beninteso, in forma intrinseca (senza coordinate o sistemi di riferimento); solo successivamente* [...] *si può notare che i punti (e i vettori) di un piano, spazio, ecc., si possono rappresentare come coppie, terne, n-ple, di numeri reali.* [...]. *La geometria di Euclide, tanto innaturale e pesante causa la mancata distinzione iniziale tra proprietà affini e metriche, può quindi venir lasciata in disparte.* [...] *diretta derivazione della nozione iniziale di sistema lineare è quella che conduce ad equazioni lineari, determinanti, ecc.* (de Finetti A 1965a, pp. 123-124)

Questi ultimi, in particolare, devono essere illustrati in forma intrinseca, come espediente. Su questa impostazione, secondo de Finetti, molti dubbi e contrarietà vennero espressi in tale occasione da Campedelli, Manara e Pescarini, preoccupati di "non abbando-

([14]) Si possono citare a questo proposito i cinque volumi di Georges Papy per la secondaria superiore *Mathématique moderne*, pubblicati a Bruxelles presso l'editore Didier tra il 1963 e il 1965.

nare la geometria di Euclide come argomento tradizionale e per ciò stesso culturalmente importante" (*Ibidem*, p. 141).

In una nota al testo del 1974 *Contro la «matematica per deficienti»* de Finetti in qualche modo rispondeva alle numerose obbiezioni che negli anni successivi si erano moltiplicate a questo proposito:

> *Pensando alla geometria dello spazio fisico, dove esiste una metrica (perché esistono corpi «rigidi» che permettono di confrontare la lunghezza di segmenti anche non paralleli), può apparire artificioso pensare a un piano privato di tale ovvietà. Ma, a parte che in matematica si deve spesso studiare le cose prescindendo volutamente da qualche cosa, considerata per il momento estranea (addirittura nella geometria proiettiva, si prescinde dalla distinzione tra punti propri e «impropri», o «all'infinito»), il piano può rappresentare situazioni per le quali la nozione metrica non ha senso. Se il vettore xa + yb indica che ho consumato x grammi di pane e y minuti di telefonate, che senso ha chiedere se i due vettori sono ortogonali, e le qualità uguali?* (de Finetti A 1974c, p. 118)

Nel già citato testo del 1978 de Finetti affrontò di nuovo l'argomento rifacendosi proprio al fusionismo:

> *La conseguenza più diretta del fusionismo, nel senso di fusione tra analisi e geometria, sarà l'impostazione della geometria sistematicamente basata sulla forma vettoriale (intrinseca) che consente di partire dalla nozione ovvia di sistema lineare. E tale punto di partenza mette automaticamente in condizione di impostare lo studio della geometria in modo immune da due gravi difetti altrimenti difficili da eliminare.* (de Finetti A 1978a, p. 11)

I due difetti sono: da una parte la separazione tra geometria piana e geometria dello spazio ("basta adottare l'impostazione vettoriale: allora non c'è più differenza e difficoltà di principio nel passare da 2 a 3 o più dimensioni"); dall'altra, "la tradizionale frammistione delle nozioni affini con quelle metriche introdotte (come in Euclide) fin da principio" (*Ibidem*).

Nel testo de Finetti cita l'opera di Jean Dieudonné, dalla quale prende le distanze. Redatta all'inizio degli anni Sessanta (Dieudonné, 1964), tradotta in italiano a cura di Angelo Pescarini nel 1970, l'*Algebra lineare e geometria elementare* di Dieudonné (Dieudonné 1970), aveva costituito, insieme alle opere di Emil Artin (Artin 1968) e di Gustave Choquet (Choquet 1967), l'approccio più diffuso di interpretazione della nuova visione della geometria, che rifacendosi alla proposta di Klein contenuta nel *Programma di Erlangen*, portava a una forte algebrizzazione, tale da oscurarne un approccio più intuitivo, basato su visualizzazione e operatività fisica. La frase di de Finetti riportata alla fine del precedente paragrafo sembra proprio alludere a tale approccio. D'altra parte lo stesso Pescarini, nella *Premessa all'edizione italiana*, parlava:

> *di sostanziale riducibilità all'algebra lineare* [della geometria. Non solo, ma adottando] *direttamente gli assiomi che caratterizzano uno spazio vettoriale e l'algebra lineare che ne consegue,* [...] *constata la «morte» della geometria, ma decreta anche la inutilità di una sua effettiva sopravvivenza nell'insegnamento.* (Pescarini 1970, p. X)

Naturalmente l'impianto che de Finetti propone è opposto all'interpretazione della cosiddetta "matematica moderna", "basata completamente sul logicismo, sull'astrazione formalistica, sulla deduzione formalizzata", in quanto, come vedremo, la sua impostazione assume come riferimento metodologico il cosiddetto "metodo genetico". Quanto all'impianto geometrico, egli scrive:

> *le geometrie da prendere in considerazione sono soltanto due: l'*affine *e la* metrica*; ma è forse opportuno menzionare anche quella* proiettiva *per completare i raffronti di possibili punti di vista.* (de Finetti A 1967a, p. 112)

Quanto agli schemi possibili di trattazione, vale a dire passare dalla geometria metrica, alla affine, alla proiettiva, oppure passare dalla geometria proiettiva alla affine, alla metrica, egli preferisce uno schema intermedio: partire dalla geometria affine per passare poi a quella metrica e a quella proiettiva. Tale percorso non va sviluppato in forma algebrica (calcolo matriciale o simili), bensì "in forma intrinseca (operando su punti, vettori, ... senza usare necessariamente un riferimento fisso)" (de Finetti A 1967a, p. 114). Nei riguardi di Euclide egli dichiara:

> *L'unico motivo che rimane valido in favore della conoscenza dell'impostazione di Euclide è, a mio avviso, quello storico.*

Quindi, si tratta di un argomento complementare e

> *non per iniziare in modo innaturale lo studio che deve portare a padroneggiare la geometria con mezzi più moderni e adeguati.* (*Ibidem*, pp. 115-116)

Quanto all'impostazione dei programmi di Frascati: per il primo biennio "la distinzione tra geometria affine e metrica è esattamente rispettata nella ripartizione degli argomenti"; nel triennio

> *si ha l'introduzione dei metodi vettoriali* [...], *piano vettoriale geometrico nel III anno, spazio nel IV, caso astratto nel V.* [...]. *Senza alterare tale ripartizione, sembra opportuno e lecito un semplice accenno iniziale (al principio del III anno) per dire che quanto viene esposto (intanto) per 2 dimensioni si estende immediatamente al caso di 3 (IV anno) o più (V anno) dimensioni.* (*Ibidem*, p. 117)

6. – Il metodo genetico e la questione dell'assiomatica e del formalismo

Una descrizione assai efficace della metodologia suggerita spesso da de Finetti nell'apprendere la matematica, e di conseguenza nell'insegnarla, si trova in un discorso rivolto "ai giovani e ai loro insegnanti", in cui chiede loro "il superamento di alcuni pregiudizi derivanti dall'abitudine ad uno studio più passivo, meccanico, mnemonico" a favore di uno sforzo "più facile e costruttivo". Spesso si dice ai giovani "voi non sapete niente".

> *Gli è che* – scrive de Finetti – *la tendenza ai compartimenti stagni viene spesso spinta fino all'assurdo di ricominciare da capo ogni argomento in ogni nuovo grado di scuole, confondendo le idee con nuove impostazioni e terminologie incuranti dei legami con le nozioni precedenti di cui si vorrebbe fare tabula rasa e che rimangono come inquietanti relitti. Quello che è utile e necessario è invece richiamarsi al già appreso per fare il punto e ripartire, dando la sensazione rassicurante che anche tutto il nuovo si innesterà naturalmente su ciò che più o meno grossolanamente e intuitivamente vi è già noto e comunque vi riuscirà comprensibile.* [...]. *Tutto il resto potrà scaturire naturalmente, spontaneamente, da quello che già sapete, purché sappiate e vogliate ascoltare lo stimolo a riflettervi sopra.* [...] *dovrete sempre riflettere per far vostra ogni acquisizione come se l'avreste scoperta voi. Infatti, essa*

> *per voi effettivamente ha senso non dal momento in cui venite a sapere che altri hanno fatto un certo ragionamento che sareste in grado di passivamente ripetere, bensì dal momento in cui quel ragionamento lo rifarete per persuadere da voi voi stessi, e ne vedete il perché e le implicazioni che vi interessano.* (de Finetti A 1978a, pp. 8-9)

Io non so se de Finetti avesse letto un'opera di David Paul Ausubel tradotta in italiano proprio nell'anno in cui egli tenne questo discorso, ma una frase centrale di questo psicologo cognitivo afferma che: "il fattore di gran lunga più importante nell'influenzare l'apprendimento è ciò che l'alunno conosce già. Verifichiamo quindi le sue conoscenze preesistenti e istruiamolo di conseguenza" (Ausubel 1978, p. 4).

Una questione assai dibattuta nell'impostare i programmi di matematica riguardava il ruolo dell'assiomatica. In una discussione con Papy a Frascati nel convegno dell'ottobre del 1964, de Finetti tendeva a escludere d'introdurla troppo presto "prima di avere una buona conoscenza intuitiva dell'argomento che permetta di giudicare dell'appropriatezza e del ruolo degli assiomi e dei concetti astrattizzati che ne derivano" (de Finetti A 1965a, p. 129). Con Papy certamente concordava sul ruolo fondamentale della considerazione prioritaria dello spazio affine rispetto quello metrico, ma su altri punti divergeva dallo studioso belga, il quale sviluppava un sistema ben impiantato sulla falsariga dell'assiomatica elaborata da Jean Dieudonné ([15]). Così de Finetti riassume il suo pensiero:

> *Lo studio sistematico, specie nella sua forma più perfetta consistente nella trattazione assiomatica, deve sopravvenire come coronamento di un processo di assimilazione e familiarizzazione già maturato almeno nel subcosciente, il quale non può essere violentato coll'introduzione di aridi congegni intellettualistici privi di appetibilità psicologica.* [...]. *Una trattazione che prendesse degli assiomi come punto di partenza sarebbe gratuita e manchevole anche dal punto di vista scientifico.* (de Finetti A 1965a, p. 123)

Carla Rossi ha ben sintetizzato questo ruolo dell'assiomatica, come pure quello del pensiero astratto e formalizzato:

([15]) Cfr. Papy 1963, 1965.

> *Se vuoi essere un buon insegnante, devi agire in modo tale che lo studente percepisca che astrarre, sviluppare un sistema assiomatico, formalizzare e dedurre seguendo regole logiche è la conclusione della sua esperienza, quando ha bisogno di vedere dall'alto e semplificare ciò che egli ha già appreso, non certo per introdurre complicazioni tecniche inutili. Si tratta della strada per scoprire l'unità che sta dietro l'apparente diversità. É il punto di arrivo, come sempre è capitato nella storia della matematica, non quello di partenza.* (Rossi 2001, pp. 3665-3666)

Come accennato nel quinto paragrafo, il suo "metodo genetico" veniva considerato come antitetico a quello assiomatico.

> *Come criterio didattico* – asserisce de Finetti – *la via che dovrebbe venire prescelta è l'opposto di quella usualmente seguita dai fautori della «matematica moderna», basata completamente sul logicismo, sull'astrazione formalistica, sulla deduzione formalizzata. Tale via pretesamente moderna sembra piuttosto una parodia peggiorativa del metodo tradizionale, arido e deduttivo.* [...]. *Tuttavia, l'opposizione alla via sedicente moderna non significa incomprensione o sottovalutazione delle esigenze di sistemazione logica cui essa sacrifica tutte le altre. Pensiamo, e speriamo che si riuscirà a provare che le sistemazioni logiche si possono costruire gradualmente, man mano che la via genetica fa incontrare il momento in cui tale conquista appare matura e si presenta una occasione propizia.* (de Finetti A 1978a, p. 16)

Anche nei commenti alle Avvertenze ai "Programmi di Frascati" si può trovare tale orientamento. Esse raccomandavano di procedere con molta misura dall'intuitivo al razionale, tenendo conto che i concetti astratti si formano lentamente, evitando l'adozione di schemi prefabbricati abituando a cercare i mezzi che consentono la soluzione più rapida ed elegante. Tuttavia, nei programmi veniva anche ribadito "il valore formativo che è proprio del metodo deduttivo". De Finetti commenta:

> *Davvero? Il metodo deduttivo da sì la certezza, che è sì un requisito necessario. Ma* [...] *la deduzione è solo un momento del ragionamento matematico, è il momento conclusivo della verifica, che è però preceduto e preparato dal lavorio costruttivo nel corso del quale certe verità appaiono plausibili e si cercano vie per cui sembra plausibile si possa giungere alla dimostrazione. È troppo unilaterale, è un fraintendimento diseducativo, apprezzare solo l'attimo che suggella il successo e non degnare di menzionare il lungo intelligente travaglio di cui è frutto.* (de Finetti A 1967a, p. 93)

Se poi alla prevalenza della deduzione, della dimostrazione, rispetto alla costruzione del significato, alla ricerca della soluzione, si accompagna l'eccesso di formalismo allora ci si perde nel vuoto:

> *Benché da un punto di vista formalistico, una nozione matematica si possa (o debba) considerare pienamente acquisita conoscendone le proprietà deducibili dalla definizione o dagli assiomi, ritengo non meno essenziale (e dal punto di vista psicologico e culturale e pratico ancor più), agli effetti di una vera conoscenza e comprensione, il sapere associare alla nozione formale una visione quanto più ampia possibile delle sue interpretazioni e applicazioni (e del perché della applicabilità) nei più disparati campi della scienza, della tecnica, della vita quotidiana.* (*Ibidem*, p. 103)

Nel quadro della logica, spesso veniva collocata anche quella che negli anni Sessanta del secolo scorso veniva chiamata l'insiemistica. Fino al Congresso dell'ICMI di Exeter del 1972 (29 agosto – 2 settembre) sembrava che il cammino di un'impostazione dell'insegnamento della matematica fondato sulla logica, a partire dalla teoria degli insiemi, fosse inarrestabile. La relazione di René Thom segnò però per l'insiemistica e in genere per la matematica moderna l'inizio di una crisi che portò a bandire nei programmi francesi del 1985 ogni riferimento a insiemi e relazioni. Addirittura in una circolare ministeriale del 17 luglio 1987 si affermava: "I simboli $\cup$, $\cap$, $\subset$ sono fuori dal programma, così come tutte le nozioni riguardanti gli insiemi e le relazioni" ([16]). Thom, infatti, nel suo intervento aveva criticato la matematica moderna e, in particolare, la tendenza a far scomparire la geometria (Thom 1973) ([17]).

De Finetti partecipò per la prima e unica volta a Exeter nel 1972 a un Congresso dell'ICMI. Nel rendiconto che fece di tale partecipazione, egli scrive a proposito delle posizioni di René Thom:

> *Sarei d'accordo* [...] *nel deprecare l'insistenza su generalità di insiemistica e di logica, cioè a dire, su di una matematica che è quanto di più povero, di*

([16]) Arrêté du 17 juillet 1987 modifiant les programmes de mathématiques.

([17]) René Thom aveva già espresso le sue osservazioni critiche tre anni prima: R. Thom, Les mathematiques "modernes": une erreur pédagogique et philosophique?, *L'age de la science*, 1970, 3, 225-236.

più vuoto, di più deprimente per l'intuizione, che sia possibile immaginare. (de Finetti A 1973l, p. 18)

Quanto alla logica e al formalismo afferma:

in ogni buon insegnamento si introducono nuovi concetti, nuove idee, facendone uso ...; solo dopo si è in grado di dare una definizione formale valida a controllare la consistenza logica della teoria. (*Ibidem*)

Circa il rigore de Finetti concordava con la posizione di Thom:

l'assoluto rigore non si raggiunge che eliminando ogni significato; ma dovendo scegliere, non si può esitare nel preferire il significato. Perciò l'enfasi posta dai "modernisti" sull'assiomatica è non solo un'aberrazione dal punto di vista pedagogico (il che è evidente) ma anche da quello prettamente matematico. (de Finetti A 1973l, pp. 18-19)

7. – La centralità del concetto di funzione

Nello sviluppo della conoscenza e della competenza matematica secondo de Finetti il concetto di funzione occupa un ruolo centrale.

Dire che per vedere funzionare la matematica, per vederla in funzione, occorre «dar preminenza alla nozione di funzione» (secondo la raccomandazione di Felix Klein ...), sarebbe un gioco di parole [...]. *Tuttavia l'asserzione fila benissimo* [...]. *Il concetto di funzione (nel senso della matematica) non è però qualcosa di astruso e di artificioso creato nella matematica e per la matematica: esso è usato sempre da tutti, nel linguaggio comune.* (de Finetti A 1978a, p. 13)

Per esemplificare meglio il processo di rappresentazione simbolica cita il caso dell'espressione "il padre di Ernesto" che diventa P(x) per indicare "il padre di x", "dove per x si può intendere qualunque persona [...] per cui la frase appaia, in qualche senso, dotata di senso" (*Ibidem*, p. 14). Scrivere "in simboli anziché a parole, significa solo usare una forma abbreviata e maneggevole che facilita i ragionamenti col mettere in evidenza ciò che è essenziale". (*Ibidem*). La rappresentazione simbolica può far "scaturire quasi automaticamente concetti e risultati inattesi anche da chi li ha introdotti". (*Ibidem)*. De Finetti cita il caso di una funzione di funzione osservando che PPx può essere interpretato come il nonno paterno di x, mentre MPx può significare la sua nonna paterna. E così via. Si tratta dello stesso approccio al concetto di funzione che trentacinque anni prima aveva inserito nella sua *Matematica logico intuitiva.* "Sia x un individuo (definiamo cioè delle funzioni nel campo costruito dagli individui); indicando ad es.: Px = padre di x; Mx = madre di x; [...] abbiamo semplici funzioni esprimenti relazioni di parentela..."(de Finetti L (1944) 1959, p. 17).

La rappresentazione cartesiana fa sì che tutte le nozioni interessanti acquistino "un rilievo particolarmente intuitivo e istruttivo (purché non lo si voglia nascondere come talvolta, purtroppo, accade" (de Finetti A 1978a, p. 14). Più in generale egli afferma che:

> *Tutte le nozioni di analisi utili per rendersi conto dell'andamento di una funzione, e descriverlo, o ragionarvi sopra, si possono introdurre in modo geometrico intuitivo (riferendosi al diagramma) assai più istruttivamente che con metodi « rigorosi» (che, tra l'altro, apparendo inidonei per ragazzi, ritardano l'acquisizione di fatti ovvi a troppo tardi e limitandola a troppo pochi).* (de Finetti A 1974c, p. 115)

Nel commento ai "Programmi di Frascati" si può trovare un passaggio interessante sull'argomento:

> *Inoltre, quanto alla significatività, va notato come un'espressione letterale, considerata come funzione di una o più delle lettere che vi intervengono (o anche di tutte), di cui interessi vedere cosa accade facendole variare, permette più o meno agevolmente di vedere come varia il risultato. Si potrà vedere ad es. che variando x (oppure a, k, y, ...) il risultato varia in modo direttamente, o inversamente, proporzionale, oppure semplicemente che cresce o diminuisce, o che è sempre positivo, ecc. Oppure si può vedere quand'è (cioè: per quali valori dati alle lettere) diviene nullo (e in questo e simili casi si parlerà di equazioni da risolvere).* (de Finetti A 1967a, p. 107)

Se poi si giunge alla considerazione di particolari funzioni:

> *Sarà dalla molteplicità di interpretazioni significative e praticamente importanti che certe funzioni* [...] *si considereranno meritevoli di particolare studio, scoprendone proprietà analitiche interpretabili significativamente anche per riguardo alle applicazioni già viste da prima e ad altre che da tali analisi si sarà portati a individuare.* (de Finetti A 1974c, p. 109)

Quali di queste vanno subito esplorate?: "anzitutto, le funzioni $y = x$ ed $y = 1/x$ vanno considerate e rappresentate fin da quando si comincia a parlare di *proporzionalità diretta* e di *proporzionalità inversa*". E poi:

> *Il quadrato e il cubo (intendo le funzioni $y = x^2$ e $y = x^3$) appariranno come indicazione del modo in cui variano aree a volumi di figure qualsiasi variandone la «scala» (ad es. modelli di una nave); il quadrato anche come energia cinetica in funzione della velocità; e via dicendo. La funzione esponenziale (e il logaritmo, come sua inversa) si presentano naturalmente come «legge della crescita naturale».* (*Ibidem*)

Il piano cartesiano deve essere introdotto per rappresentare l'andamento di fenomeni vari, partendo da esempi non matematici. Per poi: "chiarire in generale i concetti di equazione (zeri di una funzione) massimi e minimi ecc., evitando il formarsi di concetti restrittivi difficilmente poi eliminabili". Infine:

> *La nozione di convessità si presenta come fondamentale e naturale per introdurre in forma diretta ed intrinseca molti ulteriori concetti e problemi su insiemi, linee, funzioni; probabilmente dà anche la via più indovinata per la prima introduzione dei concetti dell'analisi.* (de Finetti A 1965a, pp. 124-125)

In questo contesto, può anche essere evocata la questione dell'introduzione dei vari insiemi numerici. (de Finetti, A 1967a, pp. 101-102) È una problematica che dal punto di vista didattico ha spesso coinvolto, anche emotivamente, de Finetti. In particolare, nel commentare i "Programmi di Frascati", in numerose pagine egli manifesta la sua contrarietà alla tradizionale maniera di presentare i numeri razionali:

> *Ciò che mi ripugna, e che ritengo non possa non creare confusione ai giovani, è l'idea artificiosa di presentare i numeri razionali come una specie privilegiata di oggetti concepibili come tali prima e indipendentemente dalla considerazione della totalità (naturale e intuitiva) dei numeri reali di cui fanno parte.* (de Finetti A 1967a, p. 101)

Quale approccio allora sembra valido per introdurli sulla base delle prime intuizioni? "Partendo dalla forma più pratica di rappresentazione dei numeri reali – quella di allineamenti decimali (rispondente a familiari procedimenti di misura)." De Finetti insiste, tenendo conto delle perplessità che un bambino può avere di fronte alle presentazioni tradizionali:

> *Ora che ogni bambino sa che un numero è razionale o irrazionale a seconda che la successione delle sue cifre decimali è o non è definitivamente periodica (e può costruirsi in base a ciò quanti esempi vuole di irrazionali, e ha sentito dire che sono irrazionali le radici di interi non intere, e π, ecc.) come può sopportare e spiegarsi delle perplessità per lui superate?* (*Ibidem*, p. 102)

Anche in questo caso si può trovare un analogo approccio nella *Matematica logico intuitiva.*

8. – Il calcolo delle probabilità

Leggendo gli interventi di de Finetti su questo argomento, si può cogliere una certa riluttanza ad affrontare il problema dell'introduzione dei concetti e dei procedimenti propri della probabilità nell'insegnamento non solo secondario. Ricordo una presa di posizione in occasione di un incontro della CIEAEM (*Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*) a Bordeaux dal 19 al 26 agosto 1974, dedicato proprio all'insegnamento della probabilità e della statistica. I discorsi partivano in gran parte dalle idee di Jean Piaget in proposito ([18]). La base concettuale di riferimento era la concezione classica della probabilità basata sul concetto di rapporto tra casi favorevoli e casi possibili. De Finetti era del tutto contrario a impostare un insegnamento a partire da un impianto definitorio di questo tipo. Attento agli aspetti soggettivi dell'esperienza e alle forme linguistiche ingenue che li accompagnavano, su questa base proponeva un cammino di sviluppo progressivo di un apparato concettuale e operativo che aiutasse a comportarsi in maniera coerente in condizioni d'incertezza. Egli non partecipò a tale incontro, ma inviò due paginette in cui manifestava i suoi

([18]) Le idee di Jean Piaget in merito alla probabilità si possono cogliere nell'opera: J. Piaget, B. Inhelder, *La génèse de l'idée de hasard chez l'enfant*, Paris: PUF, 1951.

dubbi relativi alla tendenza allora in atto. Lette in pubblico, tali paginette suscitarono tra gli specialisti presenti non poche discussioni, sollecitando proprio la questione centrale da dibattere: qual è la natura specifica del pensiero probabilistico a cui andrebbero educate le giovani menti?

Nel 1967 in occasione dell'elaborazione dei "Programmi di Frascati" de Finetti dichiarava a proposito della probabilità:

> *Mi trovo maggiormente in difficoltà e in imbarazzo nell'esprimere pareri e suggerimenti sul modo di concretare le generiche indicazioni del programma* [...] *nessuna spiegazione per quanto accurata sembra sufficiente a garantire dal rischio di fraintendimenti purtroppo assai frequenti.* [Per questo si era trattenuto] *dall'associarsi espressamente e pressantemente alla proposta di vari colleghi* [...] *di inserire nei programmi tale argomento.* (de Finetti A 1967a, pp. 118-119)

Alla fine, tra gli argomenti da svolgere nel quinto anno furono inseriti: "Elementi di calcolo della probabilità e semplici applicazioni alla statistica, alla teoria degli errori, ecc."

Nel commentare tale introduzione de Finetti in primo luogo metteva in guardia da alcune ingenuità:

> *Occorre quindi evitare, tra l'altro, che i tradizionali esempietti su giochi e estrazioni facciano sprecare tempo e – peggio – indurre a un'idea del tutto inadeguata della nozione di probabilità.* (*Ibidem*, p. 121)

Invece:

> *Il modo più significativo per introdurre la nozione di probabilità e dare un'idea del suo significato nei più disparati campi di applicazione è, a mio avviso, quello che si collega alle moderne assiomatizzazioni riguardanti il comportamento coerente in condizioni di incertezza.* [...]. *Ciò darebbe l'accesso più rapido (e più protetto dal rischio di fraintendimenti) alle applicazioni di natura economica, di statistica applicata, di ricerca operativa.* (*Ibidem*)

Sul piano formativo, egli insisteva nel ritenere:

> *essenziale far sapere come l'ingresso del calcolo delle probabilità nel campo fisico, dapprima limitato alle innocue applicazioni agli errori di misura,*

> *abbia poi messo in crisi le concezioni classiche deterministiche contrapponendovi una visione indeterministica.* [...]. *Sarebbe bene far sapere come ciò abbia avuto inizio con la teoria cinetica dei gas* [...], *e raggiunto l'apice con la fisica quantistica.* (*Ibidem*, p. 122)

Continuava poi accennando a questioni di teoria dell'informazione, a modelli stocastici nei vari ambiti scientifici, ecc. Concludeva suggerendo: "una precoce iniziazione dei giovani alla pratica del valutare le probabilità (cioè: di esprimere il proprio stato d'animo d'incertezza su circostanze della vita comune) e di perfezionare l'attitudine istintiva di regolarsi in base ad esse" (*Ibidem*, p. 123).

9. – Conclusione

La rilettura dei testi di Bruno de Finetti riferibili all'insegnamento della matematica, dal punto di vista dei suoi contenuti e dei suoi metodi, evidenzia una concezione della conoscenza matematica e del suo sviluppo, così come del suo insegnamento, che si basa su un'epistemologia specifica. Per comprenderla appieno credo sarebbe necessario ripercorre l'esperienza sviluppata da lui durante il periodo triestino, soprattutto quando i suoi studi e le sue riflessioni accompagnavano gli impegni presso le Assicurazioni Generali. Lo sviluppo del carattere applicativo dei concetti e dei procedimenti matematici nasceva nella e dalla sua attività: la loro forza esplicativa e risolutiva era constatazione quotidiana nel suo lavoro di economista, attuario, statistico e filosofo. Alla base di ciò, un approccio al pensiero, che da qualcuno è stato definito "pragmatista" ([19]), ma che mirava a cercare, nella varietà dei problemi e delle esperienze, nuclei di riferimento e percorsi esplicativi e risolutivi unitari. La tendenza alla riflessione sulla propria esperienza e la frequentazione di alcuni autori di riferimento, come Felix Klein, lo portarono anche verso una concezione del

([19]) Per esempio questa è l'opinione di Giulio Giorello. Cfr. G. Giorello, *"Inventare la verità": Bruno de Finetti e la filosofia*, reperibile sul sito http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Interventi/DOCUMENT/DeFinetti/Giorello_DeFinetti.pdf (controllato il 22 febbraio 2016).

pensiero matematico di natura dinamica ed evolutiva, basata sull'intuizione, ma che nella sua ricerca di unità e di sintesi giungeva all'assiomatica. La logica entrava in ciò come controllo e garanzia di coerenza, non certo come processo costruttivo di significati. Qualcosa di simile era stato già delineato da Gaston Bachelard nel 1934:

> *Ormai lo sviluppo scientifico è accompagnato da un'assiomatica. L'accompagnamento è stato scritto dopo la melodia, ma il matematico suona a due mani. Ed è una musica del tutto nuova, che esige piani di coscienza diversi, un inconscio simulato ma operante. È anche troppo facile ripetere continuamente che il matematico non sa di che cosa parli: in realtà finge di non saperlo, ha l'obbligo di parlare come se non lo sapesse, respinge l'intuizione, sublima l'esperienza.* (Bachelard 1934, p. 4)

Nel 1965 commentando i risultati del colloquio internazionale di Frascati dell'ottobre 1964, de Finetti sottolineava l'importanza delle applicazioni nel testare l'efficienza di una teoria:

> *Sull'atteggiamento verso le applicazioni pesa tuttora il vieto pregiudizio aristocratico che contrappone come inconciliabili la sublime dignità anche culturale di tutto ciò che è fine a se stesso e la volgare e spregevole strumentalità di tutto ciò che partecipa all'onta di essere utile per qualcuno o qualcosa.*

Nel seguito sembrava alludere alla contrapposizione del concepire la matematica come serva o regina, osservando che il servizio della matematica è necessario a *"quanti servono la scienza"*, e che le applicazioni sono ancor più necessarie alla matematica che a chi se ne avvantaggia perché:

> *solo mettendola alla prova si può vagliare l'efficienza, la funzionalità, la fecondità di una teoria; e sono queste qualità essenziali che ne costituiscono il pregio anche dal punto di vista estetico, come occorre spesso ricordare perché il gusto non degeneri nel decadentismo di sterili raffinatezze, di pretenziosi e goffi ornamenti, di macchinose e fumose invenzioni.* (de Finetti A 1965a, pp. 139-141)

In poche parole, la matematica è uno degli strumenti fondamentali per leggere, interpretare e valutare la realtà e per intervenire in essa al fine di risolvere i problemi cruciali che pone all'uomo, non solo nell'ambito delle differenti discipline scientifiche. In questo credo che il pensiero di de Finetti sia in linea con le tendenze attuali nel rivalutare il cosiddetto "realismo" filosofico, dopo un periodo intenso in cui si preferiva "inventare la realtà", costruendone un'interpretazione mai sottoposta a controllo empirico. Più che di pragmatismo, come talora si è considerato il pensiero di de Finetti, io preferisco parlare di realismo critico in cui esperienza e interpretazione si confrontano e dialogano continuamente nella ricerca di soluzioni umanizzanti.

C'è però un aspetto del pensiero di de Finetti che merita sottolineare nella prospettiva delle attuali ricerche sulla costruzione concettuale. Egli ha sempre insistito, valorizzando il cosiddetto metodo genetico mutuato da Felix Klein, sulla necessità di dare spazio e tempo allo sviluppo dei concetti e dei procedimenti matematici, partendo da una situazione esplorativa, spesso incerta e intuitiva, per molti versi bisognosa poi di analisi critica al fine di poterli padroneggiare. Già negli anni Settanta David Paul Ausubel (Ausubel 1978) aveva descritto un percorso simile. Nello sviluppo della conoscenza, si parte da elementi spesso confusi, poco collegati tra loro, connessi a situazioni particolari. Il successivo passaggio implica quello che è stato da lui chiamato "processo di differenziazione progressiva", cioè di identificazione più chiara e precisa del concetto stesso, differenziandolo da altri e specificandone il suo significato. Infine, attraverso il "processo di riconciliazione integrativa", occorre integrare il nuovo apporto nel contesto della struttura conoscitiva complessiva del soggetto, al fine di renderlo non solo stabile, ma anche utilizzabile nell'affrontare nuove situazioni. Oggi, a seguito degli studi sul cosiddetto carico cognitivo (Sweller 1988, 2009) ([20]), si è ancora più attenti a non voler procedere troppo velocemente e superficialmente nel proporre nuovi elementi conoscitivi, impedendo la necessaria elaborazione profonda, che ne consente un'acquisizione significativa, stabile e fruibile.

([20]) Il carico cognitivo designa la quantità totale di attività imposta in un dato istante alla memoria di lavoro di un soggetto. Dati i limiti sia temporali, sia quantitativi, che caratterizzano la memoria di lavoro, un eccessivo carico cognitivo può impedire la comprensione e/o la valorizzazione di quanto proposto dal docente.

Ci piace terminare questa rievocazione del pensiero di de Finetti, citando un passo assai pregnante dei suoi discorsi.

Chi vuole aprirsi una via in una regione inesplorata non può disporre di una mappa; la costruzione di una mappa segnerà la conclusione del suo viaggio di esplorazione [...]. *Così, per chi vuole apprendere e comprendere una teoria matematica, conviene procedere poco a poco seguendo precise effettive esigenze, coordinare man mano l'insieme delle idee acquisite, finché alla fine dell'opera, raggiunta una visione globale ormai chiaramente delineata, potrà, come ripensamento finale, cercar di individuare e confrontare diversi gruppi di semplici proposizioni atti a fungere da «sistemi di assiomi».* (de Finetti A 1978a, p. 10)

In questa impresa, a livello scolastico:

è utile e necessario [...] *richiamarsi al già appreso per fare il punto e ripartire, dando la sensazione rassicurante che anche tutto il nuovo si innesterà naturalmente su ciò che più o meno grossolanamente e intuitivamente vi è già noto e comunque vi riuscirà comprensibile. (Ibidem,* p. 8)

BIBLIOGRAFIA

ARTIN, E. (1968), *Algebra geometrica*, Milano: Feltrinelli.
AUSUBEL, D. P. (1978), *Educazione e processi cognitivi*, Milano: Franco Angeli.
BACHELARD, G. (1934), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris: Vrin.
CATALANO, G., LOMBARDO RADICE, L. (1967), *Minialgebra*, Milano: Feltrinelli.
CHOQUET, G. (1967), *L'insegnamento della geometria*, Milano: Feltrinelli.
DE FINETTI F. (2010), L'insegnamento della matematica secondo de Finetti, *Periodico di matematiche*, 3, 11-18.
DIEUDONNÉ, J. (1964), *Algèbre lineaire et géométrie élémentaire,* Pais: Hermann.
DIEUDONNÉ, J. (1970), *Algebra lineare e geometria elementare*, Milano: Feltrinelli.
GIANNARELLI, R. (1964), In margine agli ultimi colloqui, *Archimede*, 16, 39-42.
HOWSON, A. G. (Ed) (1973), *Developments in Mathematical Education.* Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge: Cambridge University Press.
KLEIN, F. (1908, 1909), *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus (3 Bände)*, Leipzig: Teubner.
OCSE (1963), *L'insegnamento matematico. Un nuovo programma per la scuola secondaria inferiore*, Roma: Armando.

OEEC (1961), *Les Mathématiques nouvelles*, Paris: OEEC.
OEEC (1962), *Une programme moderne des mathématiques pour l'enseignement secondaire*, Paris: OEEC.
PAPY, G. (1963, 1965), *Mathématique moderne* (cinque volumi), Bruxelles: Didier.
PELLEREY, M. (1989), *Oltre gli insiemi*, Napoli: Tecnodid.
PESCARINI, A. (1970), Prefazione all'edizione italiana. In J. Dieudonné, *Algebra lineare e geometria elementare*, Milano: Feltrinelli, VII-XIX.
PIAGET, J., INHELDER, B. (1951), *La génèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: PUF.
ROSSI, C. (2001), Bruno de Finetti: The mathematician, the statistician, the economist, the forerunner, *Statistics in Medicine*, 20, 3651-3666.
SWELLER, J. (1988), Cognitive load during problem solving: Effects on learning, *Cognitive science*, 12(2), 257-285.
SWELLER, J. (2009), What human architecture tells us about constructivism. In S. Tobias & T.M. Duffy (Eds.), *Constructivist Instruction. Success or Failure?*, New York, Routledge, 127-143.
THOM, R. (1970), Les mathématiques "modernes": une erreur pédagogique et philosophique?, *L'age de la science*, 3, 225-236.
THOM, R. (1973), Modern mathematics: does it exist? In A. G. Howson (Ed.), *Developments in Mathematical Education*. Proceedings of the Second International Congress on Mathematical Education, Cambridge: Cambridge University Press, 194-209.

Michele Pellerey
Università Pontificia Salesiana, Roma
pellerey@unisal.it